Übung 2

1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und c eine nicht-negative unterhalbstetige Abbildung. Zu beweisen ist, die Existenz einer Folge $\{c_n\}_n$ die wachsend nach c punktweise konvergiert, wobei jede c_n nicht-negativ, beschränkt und gleichmäßig Stetig ist. (Hinweis: untersuchen Sie die Abbildung $x \mapsto \inf_{y \in X}[c(y) + nd(x, y)]$).

2) (Fortsetzung) Mithilfe von Frage (1), beweisen Sie dass die Funktion $\pi \in \mathcal{P}(X) \mapsto \int c d\pi$ unterhalbstetig bezüglich schwache Konvergenz ist.

3) Wir zeigen dass für meßbare Kostenfunktionen, die den Wert $+\infty$ aufnehmen durfen, die Kantorovich Dualität scheitern kann. Sei $X = Y = [0, 1]$, und $\mu = \nu = \lambda$ die Lebesgue-maße auf $[0, 1]$. Als Kostenfunktion wählen wir

$$c(x, y) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x < y \\ 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Dann gilt:

3.i) Die Funktion c ist meßbar und nicht unterhalbstetig.

3.ii) Der Wert vom Kantorovich (primal) Problem zwischen μ, ν und mit Kosten c, gleicht 1.

3.iii) Der Wert vom entsprechenden dualen Problem, gleicht 0.

4) (Glueing lemma) Seien $(X_1, \mu_1), (X_2, \mu_2), (X_3, \mu_3)$ drei polnische Wahrscheinligkeitsräume. Seien $\pi \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ und $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$, Kantorovich plans auf $X_1 \times X_2$ und $X_2 \times X_3$ jeweils. Zu beweisen ist: es existiert eine Wahrscheinlichkeitsmaße P auf $X_1 \times X_2 \times X_3$ so dass ihre marginal auf $X_1 \times X_2$ gleicht π und ihre marginal auf $X_2 \times X_3$ gleicht $\tilde{\pi}$; nämlich

$$\begin{aligned} &\int f(x_1, x_2) dP(x_1, x_2, x_3) = \int f(x_1, x_2) d\pi(x_1, x_2), \quad \forall f \in C_b(X_1 \times X_2) \\ &\int g(x_2, x_3) dP(x_1, x_2, x_3) = \int g(x_2, x_3) d\tilde{\pi}(x_2, x_3), \quad \forall g \in C_b(X_2 \times X_3). \end{aligned}$$

(Hinweis: der Disintegrationssatz sagt dass $\pi(dx_1, dx_2) = \pi^{x_2}(dx_1)\mu_2(dx_2)$ und $\tilde{\pi}(dx_2, dx_3) = \tilde{\pi}^{x_2}(dx_3)\mu_2(dx_2)$.)