Übung 3

1) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ disjunkte Intervalle, und seien $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit supp $(\mu) \subset A$ und supp $(\nu) \subset B$. Als Kostenfunktion betrachten wir $c(x, y) = |x - y|$. Zu zeigen ist, dass für das entsprechende Kantorovich Problem jedes $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ optimal ist.

2) Sei $X = Y = [-1, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Sei $\mu \in \mathcal{P}(X)$ gegeben durch das ein-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$. Sei $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ gleich $1/2$ dem ein-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$ plus $1/2$ dem ein-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$. Wir betrachten das Transport Problem mit Kostenfunktion $c((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$; also der quadratische Fall. Zu beweisen ist:

2.i) Weder μ noch ν ist absolut stetig bezüglich des zweidimensionalen Lebesgue-Maßes.

2.ii) Es existiert eine Monge Transport Map von μ nach ν. Genau genommen existiert eine Folge $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von solchen Maps, deren Kosten gegen 1 konvergieren.

2.iii) Der Wert des Kantorovich Problems ist 1, und es gibt keine zulässige Monge Map, die ebenfalls diesen Wert erreicht.

3) Wir untersuchen ein Transport Problem auf $\mathbb{R}$. Seien $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktionen F_μ, F_ν. Als Kostenfunktion wählen wir $c(x, y) = h(y - x)$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ strikt konvex. Sei λ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]$. Zu zeigen ist:

3.i) Definiert man die Pseudoinverse $F_\mu^{-1}(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F_\mu(t) \geq x\}$, dann ist F_μ^{-1} wachsend, rechts-stetig und es gilt $(F_\mu^{-1})_\# \lambda = \mu$.

3.ii) Man definiere $\pi_{mon} := (F_\mu^{-1}, F_\nu^{-1})_\# \lambda$. Das heißt π_{mon} entspricht der Verteilung des Zufallsvektors $(F_\mu^{-1}(U), F_\nu^{-1}(U))$, wobei U eine uniform auf $[0, 1]$-verteilte Zufallsvariable ist. Dann gilt $\pi_{mon} \in \Pi(\mu, \nu)$ und $\pi_{mon}((-\infty, a] \times (-\infty, b]) = \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}$.

3.iii) Sei $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, für das die folgende Eigenschaft gilt:

$$\text{Wenn } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in supp(\pi) \text{ mit } x_1 < x_2, \text{ dann gilt auch } y_1 \leq y_2.$$

Dann muss $\pi = \pi_{mon}$ gelten. (Hinweis: Betrachen Sie die Mengen $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$.)

3.iv) Angenommen das Kantorovich Problem hat endlichen Wert, dann es hat eine einzige eindeutige Lösung, nämlich π_{mon}.

Bemerkung (nichts zu beweisen): Man nennt π_{mon} die "quantile transform", "Monotone rearrangement" oder auch "Fréchet coupling". Wenn h nur konvex ist, dann ist auch π_{mon} optimal, aber nicht mehr eindeutig (siehe Frage 1). Wenn μ keine Atome hat, dann ist π_{mon} von Monge-Art und explizit von der Tansport Map $T := F_\nu^{-1} \circ F_\mu$ induziert.