Übung 4

1) Lösen Sie Problem 3.(iv) von Übung 3 mithilfe vom Fundamentaler Satz optimaler Transport (Hinweis: man versucht die strikt konkavität von der Kostenfunktion zu widersprechen, in dem man die Negation der Eigenschaft von Problem 3.(iii) annimmt).

2) Im Beweis vom "Rockafellar-Rüschendorf Theorem" (10.11.2016) haben wir die Folgende Funktion definiert:

$$\begin{aligned}\varphi(x) := \inf \{ &[c(x, y_n) - c(x_n, y_n)] + [c(x_n, y_{n-1}) - c(x_{n-1}, y_{n-1})] + \\ &[c(x_{n-1}, y_{n-2}) - c(x_{n-2}, y_{n-2})] + \cdots + [c(x_1, y_0) - c(x_0, y_0)] : \\ &\text{mit } n \in \mathbb{N},\ (x_i, y_i) \in \Gamma,\ i = 1, \ldots, n \},\end{aligned}$$

wobei X, Y polnische Räume waren, $(x_0, y_0) \in \Gamma$ hielten wir fest, und $\Gamma \subset X \times Y$ c-cyclically monotone war. Zu zeigen sind die folgende zwei Argumente die in der Vorlesung nicht bewiesen worden sind:

2.i) φ ist c-Konkav (Hinweis: in der Vorlesung haben wir ein Kandidat ψ definiert, desen $\bar{c}$-transform φ sein solle).

2.ii) Sei ψ die c-transform von φ (i.e. ψ wie im vorigen Hinweis). Dann gilt

$$c(x, y) - \psi(y) \leq +c(x, \bar{y}) - \psi(\bar{y}),$$

für alle $(x, y) \in \Gamma$ und $\bar{y}$ in der Projektion von Γ in der zweiten Komponente.