

## Übung 7

0) Betrachte das Funktional ('interne Energie')

$$\mathcal{U}(\rho) = \int U(\rho) dx, U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, U(0) = 0$$

und setze  $\Psi(r) = r^n U(r^{-n}), r > 0$ . Nimm an dass  $\Psi$  nicht wachsend und  $\mathcal{U}$  displacement-konvex ist und zeige dass  $\Psi$  konvex ist.

1)

- Beweise die AM-GM Ungleichung, d.h. zeige für  $x_1, \dots, x_n \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$$\prod_k x_k^{\lambda_k} \leq \sum_k \lambda_k x_k.$$

- Finde zumindest zwei Beweise<sup>1</sup> für die Ungleichung

$$E[|X|]^2 \leq E[X^2],$$

$X$  eine beliebige Zufallsvariable, und stelle einen Zusammenhang zum ersten Teil des Beispiels her.

---

<sup>1</sup>Hinweis: Jensen, Cauchy-Schwarz.