

## 1. Übung Elemente der Stochastik WS2019

1.  $X_n$  sei binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $p_n$ , wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$  gelten soll,  $Y$  sei poissonverteilt mit Parameter  $\lambda$ . Zeigen Sie, dass dann für jedes  $x$  und  $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(X_n = x) \rightarrow \mathbb{P}(Y = x)$$

2. Wir sagen, dass die Folge  $(X_n)$  das schwache Gesetz der großen Zahlen erfüllt, wenn

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

in Wahrscheinlichkeit konvergiert. Zeigen Sie: wenn  $(X_n)$  eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer charakteristischer Funktion  $\phi$  ist, dann gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen genau dann, wenn  $\phi$  bei 0 differenzierbar ist.

3.  $X_n$  sei binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $p = 0.5$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}(S_n) + x\sqrt{\mathbb{V}(S_n)})$$

und für  $n = 10, 100, 1000$  und  $x = 0.5, 1, 1.5, 2$  mit  $\Phi(x)$ .

4.  $X_n$  sei binomialverteilt mit Parametern  $n$  und  $p = 0.2$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}(S_n) + x\sqrt{\mathbb{V}(S_n)})$$

und für  $n = 10, 100, 1000$  und  $x = \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2$  mit  $\Phi(x)$ .

5. Verwenden Sie in Beispiel 3 die Stetigkeitskorrektur:

$$\mathbb{P}(S_n \leq y)$$

wird durch

$$\Phi\left(\frac{y + 0.5 - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}\right)$$

statt

$$\Phi\left(\frac{y - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}\right)$$

approximiert.

6. Verwenden Sie in Beispiel 4 die Stetigkeitskorrektur.