3.Übung Elemente der Stochastik WS2019

1. (X_n) ist eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit der Dichte
$$f(x) = \frac{1}{x^3}[|x| \geq 1].$$
Zeigen Sie, dass $S_n/\sqrt{2n\log(n)}$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung konvergiert (Zeigen sie, dass $X_{ni} = X_i[|X_i| < \sqrt{n\log(n)}]$ die Lindeberg-Feller Bedingungen erfüllt).

2. Ein Beispiel für Konvergenz von Teilfolgen: (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit
$$\mathbb{P}(X_n = k!) = \frac{1}{k!},\ k \geq 2,$$
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 3 - e.$$
Zeigen Sie, dass $S_{n!}/n!$ gegen eine Poissonverteilung konvergiert (Setzen Sie
$$X_{ni} = X_i[X_i = n!], Y_{ni} = X_i[X_i < n!], Z_{ni} = [X_i[X_i > n!]$$
und zeigen Sie, dass $(S_{n!} - \sum_{i\leq n!} X_{ni})/n!$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert).

3. (X_{ni}) ist eine Dreiecksfolge mit $X_{ni} \in \mathbb{N}_0$ und
$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq i\leq K_n} \mathbb{P}(X_{ni} \neq 0) = 0.$$
Zeigen Sie, dass S_n genau dann gegen eine Poissonverteilung $P(\lambda)$ konvergiert, wenn
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{K_n} \mathbb{P}(X_{ni} = 1) = \lambda$$
und
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{K_n} \mathbb{P}(X_{ni} > 1) = 0.$$
(betrachten Sie für eine Richtung $\mathbb{P}(S_n = 0)$ und $\mathbb{P}(S_n = 1)$; für die andere Richtung kann man wie im vorigen Beispiel argumentieren oder die charakteristische Funktion verwenden).

4. Die geometrische Verteilung ist unendlich teilbar. Bestimmen Sie ihr Lévy-Khinchine-Maß.