4.Übung Elemente der Stochastik WS2019

1. (a) Zeigen Sie: das Maximum M_n von n unabhängig exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1 hat dieselbe Verteilung wie die Summe $Y_1 + \ldots + Y_n$ mit unabhängigen Y_j, wobei Y_j mit Parameter j exponentialverteilt ist.

   (b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung von $M_n - \log(n)$ für $n \to \infty$ (diese ist nach Punkt a) unendlich teilbar und heißt Gumbel-Verteilung und — aus offensichtlichen Gründen — auch manchmal "doppelte Exponentialverteilung", die letztere Bezeichnung kann allerdings auch die Laplace-Verteilung mit Dichte $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ für sich beanspruchen).

2. X sei exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass für jedes $0 < c < 1$ $\phi_X(t)/\phi_X(ct)$ charakteristische Funktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

3. Zeigen Sie: wenn für jedes $0 < c < 1$ $\phi(t)/\phi(ct)$ charakteristische Funktion ist, dann gibt es eine Folge (X_n) von unabhängigen Zufallsvariablen, sodass S_n/n in Verteilung gegen die Verteilung mit der charakteristischen Funktion ϕ konvergiert.

4. Die logistische Verteilung: X und Y seien unabhängig Gumbel-verteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $X - Y$ (die natürlich auch unendlich teilbar ist).

5. Zeigen Sie, dass eine Mischung von geometrischen Verteilungen (d.h. $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(1 - p_j)p_j^n, \sum \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, 0 \leq p_1 < \ldots < p_k < 1$)unendlich teilbar ist. (zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion die Form
$$\phi(t) = \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \frac{1-\theta_j e^{it}}{1-\theta_j}}{\prod_{j=1}^{k} \frac{1-p_j e^{it}}{1-p_j}}$$
mit $p_j < \theta_j < p_{j+1}$ hat).

   Durch Grenzübergang ergibt sich daraus, dass auch Mischungen von Exponentialverteilungen, auch in der allgemeineren Form
$$F(x) = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\nu(d\lambda)$$
mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß ν, unendlich teilbar sind.

6. Zeigen Sie, dass die Pareto-Verteilung mit der Verteilungsfunktion
$$F(x) = 1 - (x + 1)^{-c} \; x \geq 0$$
unendlich teilbar ist (stellen Sie die Dichte als Mischung von Exponentialdichten dar).