6. Übung Elemente der Stocahstik WS19

1. Khinchine-Maße für die stabilen Verteilungen: integrieren Sie die Gleichung
$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-sx} = \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta}(0 < \beta < 1)$$
von 0 bis t und ersetzen Sie dann t durch $\pm it = e^{-\pm\frac{i\pi}{2}t}$. Das zeigt, dass die Levi-Khinchine Maße M und N für $0 < \alpha < 1$ von der Form $cx^{-\alpha-1}d\lambda(x)$ sind. Für $1 < \alpha < 2$ ergibt sich dasselbe Ergebnis durch nochmaliges integrieren. In beiden Fällen gilt
$$\log\phi(t) = -c|t|^\alpha(1 + i\theta\mathrm{sig}(t))$$
mit
$$|\theta| \leq \tan(\frac{\pi\alpha}{2}).$$
Der Fall $\alpha = 1$ ergibt sich durch Integrieren der Gleichung für $\beta = 1$ erst von 1 bis t, dann von 0 bis t. In diesem Fall ergibt sich für die charakteristische Funktion
$$\log\phi(t) = -c|t|1 + i\theta\mathrm{sig}(t)\log(|t|) + ait$$
mit $|\theta| \leq \frac{2}{\pi}$.

2. X und Y seien unabhängig. Zeigen Sie: $X+Y$ ist genau dann integrierbar, wenn X und Y integrierbar sind (eine Richtung sollte klar sein, für die andere betrachten Sie
$$\mathbb{E}(|Y|[|X| \leq M]) = \mathbb{E}(|X + Y - X|[|X| \leq M]$$
für geeignetes $M > 0$).

3. Für $\alpha > 2$ ist $\phi(t) = e^{-|t|^\alpha}$ keine charakteristische Funktion (was wäre dann $\mathbb{E}(X^2)$?).

4. $0 < \alpha < 1$ gibt es eine stabile Verteilung mit Index α, die nur positive Werte annimmt. Diese hat die Laplacetransformierte
$$L(t) = \mathbb{E}(e^{-Xt}) = e^{-ct^\alpha}(t \geq 0)$$
mit einer Konstanten $c > 0$. Für $\alpha > 1$ gibt es keine solche Verteilung. Was ergibt sich für $\alpha = 1$?