

7. Übung Elemente der Stochastik WS19

1. Zeigen Sie: für unabhängige Zufallsvariable $X_n \sim U(0, 1)$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ gilt

$$F_n(x) = \mathbb{P}(S_n \leq x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x-k)_+^n}{n!}.$$

Leider wird diese Formel sehr schnell numerisch instabil, für $n > 30$ ist sie nicht brauchbar.

2. Im vorigen Beispiel funktioniert das Integral aus der Umkehrformel besser:

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ixt}}{2\pi it} \left(\frac{e^{it} - 1}{t} \right)^n dt.$$

Bestimmen Sie damit näherungsweise $F_n\left(\frac{n+\sqrt{n}}{2}\right)$ für $n = 10, 100, 1000$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der asymptotischen Normalverteilung.

3. Für die Verteilungsfunktion der Gammaverteilung gibt es in R die Funktion `pgamma()`. Bestimmen Sie damit (oder mit einem anderen Programm) die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X_n \leq n + x\sqrt{n})$$

für $X_n \sim \Gamma(n, 1)$, $x = -2, -1, 0, 1, 2$ und $n = 10, 100, 1000, 10000$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit der asymptotischen Normalverteilung.