3. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Beweisen Sie die Ungleichung von Ottaviani: $X_1, \ldots X_n$ seien unabhängig, $a, b > 0$ und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\max_{i \le n} |S_i| \ge a + b) \le \frac{\mathbb{P}(|S_n| \ge a)}{1 - \max_{i \le n} \mathbb{P}(|S_n - S_i| \ge b)}.$$

2. (a) X sei eine Zufallsvariable mit $\phi_x(t) = 1$ für ein $t \neq 0$. Zeigen Sie, das X mit Wahrscheinlichkeit 1 nur Werte in $\frac{2\pi}{t}\mathbb{Z}$ annimmt.

   (b) Zeigen Sie: wenn X und Y unabhängig sind und X und $X+Y$ dieselbe Verteilung haben, dann gilt $Y = 0$ fast sicher.

3. Die Aussage von Teil b) des vorigen Beispiels lässt sich auch so Ausdrücken, dass für endliche Maße auf $(\mathbb{R}, +)$ aus $\mu * \nu = \mu\ \nu = \delta_0$ folgt. Zeigen sie, dass diese Aussage auf kompakten Gruppen falsch ist.

4. Der Raum $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ ("$\mathbb{R} \pmod 1$") kann mit $(\{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}, \cdot)$ via $x \mapsto \exp(2\pi i x)$ identifiziert werden. Schließen Sie mit dem Weierstrass'schen Approximationssatz (und ein bisschen Helly), dass

   (a) die Werte von $\phi(t)$ für $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ genügen, um die zugehörige Verteilung auf $[0, 1)$ festzulegen.

   (b) die punktweise Konvergenz der Folge $\phi_n(t)$ auf $2\pi\mathbb{Z}$ äquivalent ist zur schwachen Konvergenz der zugehörigen Verteilungen.

5. Bestimmen Sie alle möglichen Grenzverteilungen für $(X_1 + \ldots + X_n) \pmod 1$ mit unabhängigen und identisch verteilten X_i und Kriterien für die Konvergenz gegen eine dieser Verteilungen.

6. Bestimmen Sie alle möglichen Grenzverteilungen für $(X_1 + \ldots + X_n) \pmod m$ mit unabhängigen und identisch verteilten $X_i \in \mathbb{Z}$ und Kriterien für die Konvergenz gegen eine dieser Verteilungen.

7. Welche Grenzverteilungen gibt es in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$?