5. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

$(S_n, n \geq 0)$ sei ein symmetrischer random walk, L_n seine lokale Zeit, $M_n = \max_{i \leq n} S_i$, $X_i = S_i - S_{i-1}$.

1. Zeigen Sie die diskrete Version der Tanaka-Formel:

$$|S_n| = \sum_{i=1}^{n} \text{sig}(S_{i-1}) X_i + L_{n-1}.$$

2. Alternative Form für die Verteilung des absoluten Maximums von S_n: setzen Sie

$$p(x,n) = \mathbb{P}(|x + S_i| \leq a, 0 \leq i \leq n),$$

zeigen Sie die Rekursion

$$p(x,n) = \frac{1}{2}(p(x-1, n-1) + p(x+1, n-1)$$

und lösen Sie diese durch Trennung der Variablen.

3. Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $L_n/\sqrt{n}$.

4. Zugeständnis an den Wunsch nach der geschlossenen Form: bestimmen sie $\mathbb{E}(S_n)$ (Hinweis: $= 2\sum_{i>n/2} 2^{-n}\binom{n}{i}(i-(n-i))$).

5. N_n sei die letzte Nullstelle von S_i vor n. Bestimmen Sie die Verteilung von N_n und die Grenzverteilung von N_n/n für $n \to \infty$

6. Y_n sei der Ort des letzten Maximums vor n (also

$$Y_n = \max\{i \leq n : S_i = M_n\}).$$

Bestimmen Sie die Verteilung von Y_n.

7. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von L_n und $|S_n|$.