5. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. W sei ein Standard-Wienerprozess.

   (a) $\tilde{W}(t) = tW(1/t)$ ist ein Wienerprozess.

   (b) $U(t) = e^{-t/2}W(e^t)$ (der Ornstein-Uhlenbeck Prozess) ist stationär.

2. Bestimmen Sie die Verteilung von

$$D = M - m$$

   mit $M = \max\{W(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ und $m = \min\{W(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. (Zur Erinnerung:

$$\mathbb{P}(a \leq m, M \leq b) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (\Phi(b + n(b-a)) - \Phi(a + n(b-a))).)$$

3. Zeigen Sie die folgende Version des Borel-Cantelli Lemmas: wenn A_n Ereignisse sind mit

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

   und

$$\liminf \frac{\sum_{i,j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)}{(\sum_{i \leq n} \mathbb{P}(A_i))^2} = 1.$$

   Dann gilt $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. (Schätzen Sie $\mathbb{P}(\sum_{i \leq n} I_{A_i} \leq M)$ mit der Chebychev-Ungleichung ab).

4. Das Gesetz von Hirsch: $f \geq 0$ sei nichtfallend und $f(x)/x \downarrow 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\max_{s \leq t} W(s) \geq f(t) \text{ unendlich oft}) = 1$$

   wenn $\int t^{-3/2} f(t) dt = \infty$ und 0 sonst.
   Untere Abschätzung: betrachten Sie die Ereignisse

$$A_n = [\max_{s \leq 2^n} W(s) \leq f(2^{n+1}).$$

5. Fortsetzung: obere Abschätzung: Setzen sie

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : W(t) \geq f(2)\},$$

$$T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} : W(T_{n-1} + t) - W(T_{n-1}) \geq f(2^n) - f(2^{n-1})\},$$

   und betrachten Sie die Ereignisse $[T_n \geq 2^n]$.

6. Zeigen Sie

$$\limsup_{t \to 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1.$$

7. Der fast sichere zentrale Grenzwertsatz: Aus dem Ergodensatz von Birkhoff folgt, dass

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I\{U(t) \leq A\} dt$$

konvergiert, aus dem Hewitt-Savage Null-Eins-Gesetz folgt die Ergodizität dieses Prozesses. Mit der Skorohod-Einbettung folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} \sum \frac{1}{k} I\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} \leq a\} = \Phi(a),$$

wenn $\mathbb{E}(X_i) = 0, \mathbb{E}(X_i^2) = 1, \mathbb{E}(|X|^{2+\epsilon}) < \infty$.