9. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Im Anschluss an die letzte Übung: es sei X wieder ein metrischer Raum, $\tilde{X}$ seine Vervollständigung. Zeigen Sie: wenn $X \in \mathfrak{B}(\tilde{X})$, dann ist der schwache limes einer Folge von Radonmaßen ein Radonmaß.

2. X sei eine Teilmenge von $[0,1]$ mit $\lambda^*(X) = \lambda^*(X^C) = 1$ und $\mathbb{Q} \subset X$. Zeigen Sie, dass durch $\mu(A \cap X) = \lambda(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, ein Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ definiert ist.

3. Fortsetzung: zeigen Sie, dass jedes Radonmaß auf X singulär (zum Lebesguemaß) ist.

4. Fortsetzung: es sei $\mu_n(\{k/n\}) = 1/n$ $(k = 1, \ldots, n)$. μ_n sind Radonmaße auf X, aber ihr schwacher Grenzwert nicht.

5. Für uns ist eine banachwertige Zufallsvariable eine messbare Abbildung aus einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Banachraum, deren Verteilung regulär (also Radon) ist. In der gewohnten Weise kann man die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit definieren. Zeigen Sie, dass die Treppenfunktionen in der Menge der Zufallsvariablen dicht liegen.

6. Die Definition der L_p-Norm lässt sich ebenfalls in natürlicher Weise auf banachwertige Zufallsvariable übertragen. Sie kann auch auf $0 < p < 1$ ausgedehnt werden, allerdings ist sie nur eine Quasinorm (die Dreiecksungleichung wird durch die schwächere Bedingung $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ ersetzt).

   Damit lässt sich jedenfalls eine Topologie (via Umgebungsbasis) auf L_p definieren, die wir ergänzen, indem wir als L_0 die (Äquivalenzklassen von) endlichen Zufallsvariablen mit der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit einsetzen.

7. X und Y seien zwei unabhängige banachwertige Zufallsvariable, und X uns $X + Y$ mögen dieselbe Verteilung haben. Zeigen Sie, dass fast sicher $Y = 0$ gilt.