ÜBUNGSBLATT 10

63) SYMMETRISCHE IRRFAHRT
Die alternativ-verteilten stochastischen Größen $(X_i)_{i\geq 1}$ mit

$$\mathbf{P}[X_i = -1] = \mathbf{P}[X_i = 1] = \frac{1}{2}$$

seien unabhängig, dann gilt für die Summe $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\mathbf{P}[\limsup_n S_n = \infty] = 1 .$$

64) Für die Irrfahrt S_n mit $\mathbf{P}[X_i = 1] = p \geq \frac{1}{2}$ mit $S_0 = 0$ betrachte man die Rekurrenzzeit nach 0, $T_0 := \inf\{n > 0 | S_n = 0\}$. Man zeige $\mathbb{E}T_0 = \infty$.

65) S_n sei ein *Random Walk* auf $\overline{\mathbb{R}}$ mit dem Sprungmaß

$$\mathbf{P}[X = 1] = p_1, \quad \mathbf{P}[X = 2] = p_2, \quad \mathbf{P}[X = \infty] = 1 - p_1 - p_2, \quad (p_1, p_2 > 0).$$

Es sei $N := \min\{n > 0 | S_n = \infty\}$.

a) Sind N bzw. $N^* := N - 1$ Stoppzeiten?
b) Man zeige $\mathbf{P}[N < \infty] = 1$,
c) bestimme die gemeinsame Verteilung von (N^*, S_{N^*}),
d) und die Erwartung $\mathbb{E}S_{N^*}$.

66) N_t sei ein inhomogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda(t)$ und $\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s)\, ds$. Welche der folgenden Prozesse sind Martingale ?

a) $N_t - \Lambda(t)$,
b) $(N_t - \Lambda(t))^2 - \Lambda(t)$,
c) $\exp[sN_t - \Lambda(t)(\exp(s) - 1)]$ für $s \in \mathbb{R}$.

67) Der Poissonsche Punktprozess $N(.)$ in $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2, \lambda^2)$ hat Rate $\nu > 0$, somit gilt für die Anzahl der Ereignisse in $B \in \mathfrak{B}^2$

$$N(B) \sim P_\mu \qquad \text{mit } \mu = \nu.\, \lambda^2(B) .$$

Für einen festen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ sei X der euklidische Abstand von x zu dem nächstgelegenen Punkt(-Ereignis) von $N(.)$. Man bestimme die Verteilung und Erwartung von X.

68) Für die asymmetrische Irrfahrt S_n mit $\mathbf{P}[X_i = 1] \;=\; p \;\neq \frac{1}{2}$, $q = 1 - p$, mit $S_0 = 0$ sei $\tau := \min\{n | S_n \notin (-a, b)\}$ für $a, b \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $\mathbb{E}\tau < \infty$ und dass

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \qquad \text{und} \qquad S_n \;-\; n(p-q)$$

Martingale sind.

69) Unter Verwendung der Martingaleigenschaften zeige man für die Irrfahrt aus dem letzten Beispiel

$$\mathbf{P}(S_\tau = b) \;=\; \frac{1 - (p/q)^a}{(q/p)^b - (p/q)^a}$$

und bestimme $\mathbb{E}\,\tau$.