Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide VO: Prof. Felsenstein WS 2015

ÜBUNGSBLATT 5

28) Für eine Cauchy-Verteilung C_λ, $\lambda > 0$ mit der Dichte

$$f(x) \; = \; \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2 + x^2)}$$

bestimme man die charakteristische Funktion und zeige, dass die Cauchy-Verteilung gegenüber Faltung abgeschlossen ist, $C_\lambda * C_\tau = C_{\lambda+\tau}$. Welche Verteilung besitzt das arithmetische Mittel

$$\overline{X}_n \; := \; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

für unabhängige und identisch Cauchy-verteilte Stochastische Größen $X_i \sim C_\lambda$?

29) Für die $k-$dimensionale Normalverteilung $\boldsymbol{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ soll die charakteristischen Funktion

$$\varphi(t) \; = \; \mathbb{E} \; \mathrm{e}^{i\boldsymbol{X}^\top t}, \qquad t \in \mathbb{R}^k,$$

bestimmt werden. Damit zeige man, dass die Randverteilung einer Komponente X_i von $\boldsymbol{X}$ wieder normalverteilt ist.

Hinweis: Man betrachte zunächst unabhängige Standardnomalverteilungen für X_i und verwende dann die Reproduktionseigenschaft.

30) Die charakteristische Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ ist periodisch mit der Periode 2π und für $t \in [-\pi, \pi)$ ist

$$\varphi(t) \; = \; 1 - 2\frac{|t|}{\pi} \; .$$

Man bestimme das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}$ zu φ.

31) Man berechne die charakteristische Funktion der Multinomialverteilung $M_{N;p_1,p_2,\ldots,p_k}$ des stochastischen Vektors $X \in \mathbb{N}^{k-1}$. Damit soll gezeigt werden, dass jeder Teilvektor $X_0 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})$ von X mit $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$ wieder Multinomialverteilt ist.

32) Es kann keine Zufallsgröße X geben, sodass die zugehörige charakteristische Funktion φ die Gestalt

$$\varphi(t) \; = \; \exp(-|t|^\alpha)$$

hat, wenn $\alpha > 2$.

33) Man berechne die charakteristische Funktion von $U \sim U_{-1,1}$ und zeige, dass es keine unabhängig, identisch verteilten $X\,, Y$ mit $X - Y \sim U_{-1,1}$ gibt.

34) Es sei X eine Zufallsgröße, für die die Moment-erzeugende Funktion

$$\psi_X(s) \;=\; \mathbb{E}\ \exp(sX)$$

für $s > 0$ existiert. Es sollen folgende Ungleichungen für Abweichungswahrscheinlichkeiten gezeigt werden:

a)

$$\mathbf{P}[X \geq\ t] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}(X^+)}{t} \qquad\qquad t > 0$$

b) CHERNOFF-SCHRANKE

$$\mathbf{P}[X \geq\ t] \;\leq\; \inf_{s \geq 0}\ \mathrm{e}^{-s.t}\psi_X(s)$$