ÜBUNGSBLATT 6

35) Man zeige, dass jede Mischung von symmetrischen, unabhängigen Verteilungen X_i

$$Y \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; X_i$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ symmetrisch ist. Gilt dies auch für $Y \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \; \alpha_i \; X_i$ bei einer unabhängigen Folge und $\sum_i \alpha_i = 1$ und $\alpha_i > 0$?

36) Mit der charakteristischen Funktion $\varphi_X(t)$ von X kann für jedes $a > 0$ die Abschätzung

$$\mathbf{P}[\; |X| > \frac{2}{a} \;] \;\leq\; \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} (1 - \varphi_X(t)) \; dt$$

angegeben werden.

37) Wenn die charakteristischen Funktion $\varphi_X(t)$ von X für ein $t_0 \neq 0$ $\varphi_X(t_0) = 1$ erfüllt, dann ist X diskret verteilt und zwar auf den Punkten $\frac{2\pi n}{t_0}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zudem soll das für die Poissonverteilung bestätigt werden.

38) Die nicht-negative und unabhängige stochastische Folge X_i erfülle $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{i^2}$. Mit dem *Drei-Reihen-Satz* soll die Konvergenz von $\sum_i X_i$ geprüft werden.

39) Die stochastische Folge X_i seien zufällige und unabhängige Vorzeichen,

$$\mathbf{P}[X_i = -1] = \mathbf{P}[X_i = 1] = \frac{1}{2}.$$

a_i sei eine reelle Folge. Unter welchen Bedingungen für diese Folge gilt die Konvergenz von $\sum_i Z_i$ für $Z_i = a_i X_i$?

40) Für ein unabhängiges, zentriertes Schema mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ genügt ein beschränktes drittes Moment,

$$\mathbb{E}(|X_i|^3) \;<\; M \;<\; \infty \;\;,$$

für die Konvergenz von $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Hinweis: Man prüfe die Lindeberg-Bedingung.

41) Die Stichprobe $X_i, i = 1, \ldots, n$ stamme von der ' kontaminierten ' Verteilung

$$X \;=\; (1-\epsilon)X_1 \;+\; \epsilon X_2$$

mit $X_1 \sim N(\mu, 1)$, $X_2 \sim C_{\mu,1}$ und unabhängig, $0 < \epsilon < 1$.

Man bestimme die charakteristische Funktion von X und von $\overline{X}_n$.

Existiert ein Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ von $\overline{X}_n \xrightarrow{f.s.} a$?

Besitzt $\overline{X}_n$ eine Grenzverteilung ?

Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß von X unbegrenzt teilbar?