ÜBUNGSBLATT 8

49) Der Träger des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ (auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) sei beschränkt. Dann liegt liegt $\mathbf{P}$ im Anziehungsbereich der Normalverteilung. Gilt das auch für Wahrscheinlichkeitsmaße mit endlicher Varianz?

50) In welchen Anziehungsbereich liegt die ParetoVerteilung, Pa_1, mit Verteilungsfunktion

$$F(x) \; = \; 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{für} \qquad x \geq 1 \qquad ?$$

51) Der *Zählprozess* N_t hat identisch verteilte und unabhängige Zwischenankunftszeiten $T_i \geq 0$ mit $S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$ und

$$N_t \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[S_k \leq t]}$$

Wenn $\mathbb{E}T_i \in (0, \infty)$, dann gilt fast sicher $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \; = \; \frac{1}{\mathbb{E}T}.$$

52) Für den (homogenen) Poissonprozess $N_t, t > 0$ soll gezeigt werden, dass N_t die Bedingungen des Zählprozesses erfüllt, (also aus der Darstellung in Definition 5.1 folgt auch die in 5.3).

53) Für den Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate λ werde das Intervall $[0, t]$ in n gleiche Intervalle geteilt und in jedem Intervall eine Indikatorvariable Y_i für den Eintritt eines Ereignisses definiert.

$$\mathbf{P}[Y_i = 1] \; = \; p_n$$

Man bestimme die Verteilung von

$$S_n \; = \; \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

überlege sich, dass $np_n \to \lambda t$ und dass $S_n \to N_t$ in Verteilung für $n \to \infty$.

54) $T_i, i = 1, \ldots, k$ seien die Zwischenankunftszeiten eines Poissonprozess N_t mit Rate λ und S_k die Zeit bis zum k-ten Ereignis. Man bestimme die Verteilung und den Erwartungswert sowohl der minimalen als auch der maximalen Zwischenankunftszeit, wenn $S_k = T$.

55) Die unabhängige Stichprobe der Indikatorvariablen Y_i mit $\mathbf{P}[Y_i = 1] \; = \; p$ sei unabhängig vom Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate λ. Man bestimme die Verteilung und Erwartung des Compound Poissonprocess $X(t)$.