ÜBUNGSBLATT 9

56) Die Stichprobe Y_i mit Verteilung $Y_i \sim F$ und der davon unabhängige Poissonprozess N_t bilden den Compound Poissonprocess $X(t)$. Y habe dieselbe Verteilung $Y \sim F$ und sei von allen Y_i und N_t unabhängig. Man zeige für beliebiges (integrierbares) H die
Compound Poisson Identity

$$\mathbb{E}[X(t)H(X(t))] \;=\; \lambda\, t\, \mathbb{E}[YH(X(t)+Y)].$$

Hinweis: Man fasse Y als Realisierung Y_{n+1} auf und betrachte die bedingten Erwartungen unter $N_t = n+1$.

57) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels können die Momente des Compound-Poisson Prozesses rekursiv bestimmt werden:

$$\mathbb{E}(X(t)^n) \;=\; \lambda\, t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbb{E}(X(t)^k)\; \mathbb{E}(Y^{n-k}) \quad .$$

Mit dieser Darstellung berechne man die ersten drei Momente und die Varianz von $X(t)$.

58) Die Kovarianzfunktion $\eta_Z(t,s) = \mathsf{cov}(Z_s, Z_t)$ des Prozesses Z_t soll für einen Poissonprozess $Z_t = N_t$ mit Rate λ bzw. auch für einen Compound Poissonprocess $X(t)$ mit einer geometrisch verteilten Stichprobe $Y_i \sim G_\theta$ bestimmt werden.

59) Der Prozeß N_t sei ein conditional Poissonprocess mit eine Exponentialverteilten Rate $\lambda \sim Ex_\theta$. Man bestimme die Verteilung von N_t und $\mathbb{E}N_t$. Sind die Zuwächse von N_t stationär bzw. unabhängig?

60) Man betrachte die bedingte Verteilung der Ankunftszeiten $S_1, \ldots, S_n$ unter dem Ereignis $N_t = n$ für den Poissonprozess N_t mit Intensität λ.

- **a)** Man bestimme die bedingte Verteilung von $S_k | N_t = n$
- **b)** und die gemeinsame Dichte von $(S_1, S_n) | N_t = n$.

Hinweis: Man kann die Verteilungen für $t = 1$ bestimmen.

61) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels, bestimme man die Verteilung des *Range of Events*

- **a)** $R := S_n - S_1$ unter $N_t = n$
- **b)** und die Grenzverteilung für $2n(1-R)$ bei $n \to \infty$.

62) Die Zwischenankunftszeiten T_i stammen von N_t , dem conditional Poissonprocess des Beispiels 59). Man bestimme die Verteilung von T_i für $i = 1, 2$. Sind die Folge T_i identisch verteilt bzw. unabhängig ? Welche Momente besitzen die SGn T_i ?