

Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

<http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide>

VO: S. Källblad / K. Felsenstein

WS 2017

ÜBUNGSBLATT 1

- 1) Für die Zufallsvariablen X, Y mit der Dichte $f(x, y) := \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechne man die bedingten Dichten $f_{X|Y}, f_{Y|X}$ und $\mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(Y|X)$.
- 2) Für die Sub- σ -Algebra \mathfrak{A} und die Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[|X| | \mathfrak{A}] < \infty$ f.s. genau dann, wenn es eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\sum_i \mathbf{P}(A_i) = 1$ und für $i \geq 1$

$$\mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{A_i}] < \infty .$$

- 3) Die stochastischen Größen X, Y, Z seien integrierbar. Gilt dann

$$\mathbb{E}[X|Y, Z] = \mathbb{E}[X|Z] ,$$

falls X und Y unabhängig sind?

- 4) Die Stochastischen Größen X, Y seien quadratisch integrierbar auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ mit der Sub- σ -Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$. Man zeige:
 - a) $\text{Var} X = \text{Var} \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) + \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})]^2 \Rightarrow \text{Var} \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \leq \text{Var} X$.
 - b) Aus $\mathbb{E} X^2 = \mathbb{E} Y^2$ und $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}) = X$ \mathbf{P} -fs. folgt $X = Y$ \mathbf{P} -fs.

- 5) Unter den Annahmen des letzten Beispiels gilt auch

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \text{ } \mathbf{P}\text{-f.s.} \wedge \mathbb{E}(Y|X) = X \text{ } \mathbf{P}\text{-f.s.} \Rightarrow X = Y \text{ } \mathbf{P}\text{-f.s.}$$

- 6) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X auf $(\Omega, \mathfrak{G}, \mathbf{P})$ und eine sub- σ -Algebra \mathfrak{A} von \mathfrak{G} gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon | \mathfrak{A}] \leq \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|) | \mathfrak{A}]}{\eta(\epsilon)} .$$