3. Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie WS18

W sei ein Standard-Wienerprozess.

1. Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion des Wienerprozesses:

$$R(s,t) = \mathbb{C}\rtimes\approx(W(s), W(t)).$$

   (der Wienerprozess ist ein Gaussprozess und als solcher durch Mittelwert- und Kovarianzfunktion festgelegt; insbesondere sind für Gaussprozesse Unabhängigkeit und Unkorreliertheit äquivalent).

2. Der Prozess

$$B(t) = W(t) - tW(1)0 \leq t \leq 1$$

   heißt Brownsche Brücke. Bestimmen Sie seine Kovarianzfunktion und zeigen Sie, dass er von $W(1)$ unabhängig ist.

3. $\tilde{W}(t) = tW(1/t)$ ist ein Wienerprozess.

4. $\tilde{B}(t) = (1-t)W(\frac{t}{1-t})$ ist eine Brownsche Brücke.

5. Das Gesetz von Hirsch: $f \geq 0$ sei nichtfallend und $f(x)/x \downarrow 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\max_{s \leq t} W(s) \geq f(t) \text{ unendlich oft}) = 1$$

   wenn $\int t^{-3/2} f(t) dt = \infty$ und 0 sonst.

   Untere Abschätzung: betrachten Sie die Ereignisse

$$A_n = [\max_{s \leq 2^n} W(s) \leq f(2^{n+1}).$$

6. Fortsetzung: obere Abschätzung: Setzen sie

$$T_1 = \inf\{t \geq 0 : W(t) \geq f(2)\},$$

$$T_n = \inf\{t \geq T_{n-1} : W(T_{n-1} + t) - W(T_{n-1}) \geq f(2^n) - f(2^{n-1})\},$$

   und betrachten Sie die Ereignisse $[T_n \geq 2^n]$.

7. Zeigen Sie

$$\limsup_{t \to 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \log\log(1/t)}} = 1.$$