**5.Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie WS18**

1. $W$ sei ein Standardwienerprozess, $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

   $$Y(t) = e^{sW(t)-s^2 t/2)}$$

   ein Martingal ist

2. Wenden Sie das optional stopping theorem auf das Martingal

   $$Y(t) = e^{sW(t)-s^2 t/2}$$

   an und bestimmen Sie so

   $$\psi_\tau(x) = \mathbb{E}(e^{-x\tau})$$

   für die Stoppzeit

   $$\tau = \inf\{t : W(t) = a\}.$$

3. Wenden Sie das optional stopping theorem auf das Martingal

   $$Y(t) = e^{sW(t)-s^2 t/2}$$

   an und bestimmen Sie so

   $$\psi_\tau(x) = \mathbb{E}(e^{-x\tau})$$

   für die Stoppzeit

   $$\tau = \inf\{t : |W(t)| = a\}.$$

4. Die quadratische Variation des Wienerprozesses:

   $$T_n = \{t_{ni}, i = 0, \ldots, k_n\}$$

   mit

   $$t_{n0} = 0 < t_{n1} < \ldots < t_{nk_n} = t$$

   Sei eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[0, t]$ mit

   $$\|T_n\| = \max_{1 \le i \le k_n} (t_{ni} - t_{n,i-1}) \to 0.$$

   Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von

   $$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} (W(t_{ni}) - W(t_{n,i-1}))^2$$

   und zeigen Sie, dass $S_n$ im Quadratmittel gegen $t$ konvergiert (wird oben der Wienerprozess durch ein quadratintegrierbares Semimartingal ersetzt, dann heißt $\lim S_n$ — der im allgemeinen nur in Wahrscheinlichkeit zu erhalten ist — die quadratische Variation von $X$, $[X]_t$. Wir haben also $[W]_t = t$).

5. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = t$,

$$X_i = W(t_i) - W(t_{i-1}).$$

Zeigen Sie, dass $|X_1|, \ldots, |X_n|, Y_1, \ldots Y_n$ mit $Y_i = \mathrm{sign}(X_i)$ unabhängig sind mit $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = 1/2$. Deshalb ist

$$\mathbb{E}(W(t)^2 || X_1| = x_1, \ldots, |X_n| = x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Wenn die Zerlegungsfolge $T_n$ im vorigen Beispiel absteigend ist, also $T_n \subseteq T_{n+1}$ gilt, dann folgt daraus

$$\mathbb{E}(S_n | S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots) = S_{n+1}.$$

$S_n$ ist also ein "umgekehrtes Martingal", und deshalb konvergiert $S_n$ in diesem Fall mit Wahrscheinlichkeit 1.

6. Bestimmen Sie

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{\int_0^T W(t)dt}{\sqrt{2T^3 \log\log T}}.$$

7. Bestimmen Sie

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{\int_0^T W(t)^2 dt}{2T^2 \log\log T}.$$