Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: K. Felsenstein / Z. Saffer WS 2019

ÜBUNGSBLATT 12

51) Zur Verteilungsfunktion der Stichprobe $X_i \sim F$ besitzt den Endpunkt

$$x_R := \sup\{x | F(x) < 1\}$$

Dann konvergiert das Maximimum gegen x_R,

$$\lim_{n\to\infty} M_n \xrightarrow{f.s.} x_R \quad .$$

52) Die Verteilungsfunktion F von X_i sei stetig, auch F^{-1} sei stetig. Man zeige, dass dann

$$Z_n \ := \ n(1 \ - \ F(M_n)) \tag{52-1}$$

eine Grenzverteilung besitzt und bestimme diese Verteilung.

Daraus soll für die Gleichverteilung $X_i \sim U_{0,1}$ eine Grenzfolge im Sinne von (52-1) gefunden werden.

53) Für eine gleichverteilte Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim U_{0,\theta}$ besitzt

$$-n \ M_n + n\theta$$

eine Grenzverteilung. In welchen Anziehungsbereich fällt also die Gleichverteilung ?

54) Die Verteilung mit

$$F(x) \ = \ \exp(-x^{-\alpha})\mathbb{1}_{0,\infty}(x)$$

für $\alpha > 0$ heißt *Frechet-Verteilung* . Man zeige, dass diese Verteilung max-stabil ist, also a_n, b_n existieren, sodass F_n als Verteilungsfunktion von M_n

$$F_n(a_n x + b_n) \ = \ F(x)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Genau diese Eigenschaft zeige man auch für die Weibull- und die Gumbelverteilung.

55) Für nicht negative X_i (nicht unbedingt unabhängige) stochastische Größen mit Maximum M_n zeige man für beliebiges $c \in \mathbb{R}$

a)

$$M_n \leq c + \sum_{i=1}^{n} (X_i - c)^+$$

b) und daher

$$\mathbb{E}M_n \leq c + \sum_{i=1}^{n} \int_c^\infty \mathbf{P}(X_i > t) \ dt$$

c) für identisch exponential verteilte Größen $X_i \sim Ex_\lambda$ gebe man eine obere Schranke für $\mathbb{E}M_n$ an.