Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: K. Felsenstein / Z. Saffer WS 2019

ÜBUNGSBLATT 4

17) Die Folge Y_i bestehe aus unabhängig und identische verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_0 bezüglich des Maßes μ auf $\mathbb{R}$. f_1 sei eine weitere Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich μ. Dann bilden die *Likelihood-Quotienten*

$$L_n \ := \ \frac{\prod_{i=1}^n f_1(Y_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(Y_i)}$$

ein Martingal adaptiert an die kanonische Filtration von Y_i.

18) Beweisen Sie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass bei einer Folge unabhängiger Zufallsvariabler X_n für jedes terminale A $\mathbf{P}(A) = 0$ oder $\mathbf{P}(A) = 1$ gilt, mit Hilfe von Resultaten der Martingaltheorie.

Hinweis: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \sigma(X_1, \ldots, X_n))$.

19) Der Prozess $X_t, t \geq 0$ sei zur Filtration $\mathcal{F}_t$ adaptiert. Für alle beschränkten Stoppzeiten τ gelte

$$\mathbb{E}|X_\tau| \ < \ \infty \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}X_\tau \ = \ \mathbb{E}X_0 \ .$$

Man zeige, dass dann X_t ein Martingal ist.

Hinweis: Für $s \leq t$ definiere man $\tau := s\mathbb{1}_A \ + \ t\mathbb{1}_{A^c}$ bei $A \in \mathcal{F}_s$.

20) Man beweise, dass $(\, X_n \vee Y_n \,, \mathfrak{S}_n)$ ein Submartingal ist, wenn $(\, X_n \,, \mathfrak{S}_n)$ und $(\, Y_n \,, \mathfrak{S}_n)$ Submartingale sind.

21) Die monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ erfüllt $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. Wenn eine Folge von Zufallsvariablen X_n

$$\sup_n \mathbb{E}\, g(|X_n|) \ < \ \infty$$

erfüllt, dann ist X_n gleichgradig integrierbar.