ÜBUNGSBLATT 8

37) Der *Zählprozess* N_t hat identisch verteilte und unabhängige Zwischenankunftszeiten $T_i \geq 0$ mit Sprungzeiten $\tau_k = \sum_{i=1}^{k} T_i$ und $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[\tau_k \leq t]}$. Wenn $\mathbb{E}T_i \in (0, \infty)$, dann gilt fast sicher $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}T}.$$

38) N_t sei ein inhomogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda(t)$ und $\Lambda(t) := \int_0^t \lambda(s)\, ds$. Welche der folgenden Prozesse sind Martingale ?

- **a)** $N_t - \Lambda(t)$,
- **b)** $(N_t - \Lambda(t))^2 - \Lambda(t)$,
- **c)** $\exp[sN_t - \Lambda(t)(\exp(s) - 1)]$ für $s \in \mathbb{R}$.

39) Die Stichprobe Y_i mit Verteilung $Y_i \sim F$ und der davon unabhängige Poissonprozess N_t bilden den Compound Poissonprocess $X(t)$. Y habe dieselbe Verteilung $Y \sim F$ und sei von allen Y_i und N_t unabhängig. Man zeige für beliebiges (integrierbares) H die
Compound Poisson Identity

$$\mathbb{E}[X(t)H(X(t))] = \lambda\, t\, \mathbb{E}[YH(X(t) + Y)].$$

Man wende diese Gleichung für die rekursive Bestimmung von Momenten an:

$$\mathbb{E}(X(t)^n) = \lambda\, t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbb{E}(X(t)^k)\ \mathbb{E}(Y^{n-k}) \quad .$$

Hinweis: Man fasse Y als Realisierung Y_{n+1} auf und betrachte die bedingten Erwartungen unter $N_t = n + 1$.

40) Die Kovarianzfunktion $\eta_Z(t, s) = \mathsf{cov}(Z_s, Z_t)$ des Prozesses Z_t soll für einen Poissonprozess $Z_t = N_t$ mit Rate λ bzw. auch für einen Compound Poissonprocess $X(t)$ mit einer geometrisch verteilten Stichprobe $Y_i \sim G_\theta$ bestimmt werden.

41) Man betrachte die bedingte Verteilung der Sprungzeiten $\tau_1, \ldots, \tau_n$ unter dem Ereignis $N_t = n$ für den Poissonprozess N_t mit Intensität λ.

- **a)** Man bestimme die bedingte Verteilung von $\tau_k | N_t = n$
- **b)** und die gemeinsame Dichte von $(\tau_1, \tau_n) | N_t = n$.
- **c)** man bestimme die Verteilung des *Range of Events* $R := \tau_n - \tau_1$ unter $N_t = n$
- **d)** und die Grenzverteilung für $2n(1 - R)$ bei $n \to \infty$.

Hinweis: Man kann die Verteilungen für $t = 1$ bestimmen.