Theoretische Informatik, Übung (108.037)

8. April 2013

1. Beweisen Sie dass $\{ab, aba\}^* = \{\varepsilon\} \cup \{a\}\{ba, baa\}^*\{b, ba\}$ (beweisen Sie also zwei Inklusionen „$\subseteq$” und „$\supseteq$”).

2. Konstruieren Sie ein DFA das die Sprache $\{0, 1\}^*$ im Alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ akzeptiert.

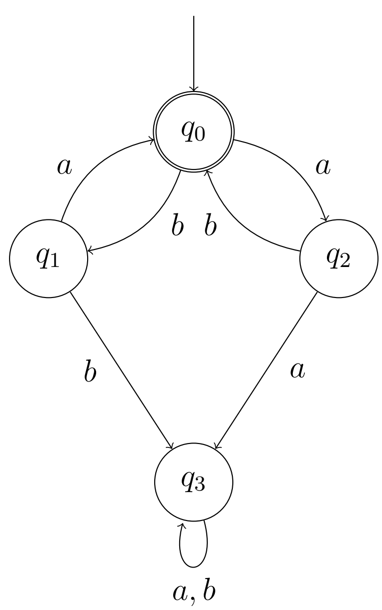
3. Konstruieren Sie ein DFA das die Sprache

   $L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*$ und die Differenz der Anzahlen von 0ern und 1ern in w ist gerade $\}$

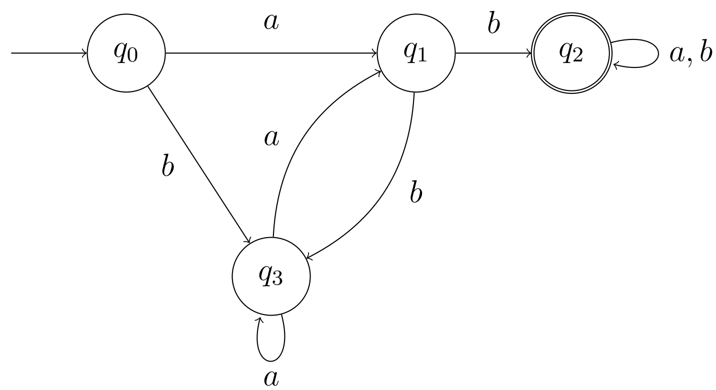
   im Alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ akzeptiert.

4. Konstruieren Sie ein DFA das die Sprache $L = \{w \mid$ vor jedem a steht in w ein $b\}$ im Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ akzeptiert.

5. Beschreiben Sie die Sprache, die von folgendem DFA erkannt wird:



6. Beschreiben Sie die Sprache, die von folgendem NFA erkannt wird:



7. Verwenden Sie den Algorithmus aus dem Beweis aus der Vorlesung, um das NFA aus Aufgabe (6) in ein DFA umzuwandeln.

8. Konstruieren Sie ein NFA das die Sprache

$$L = \{w \mid w \neq \varepsilon \text{ und die Anzahl von 1ern in } w \text{ ist durch 3 teilbar}\}$$

akzeptiert.

9. Beweisen Sie, dass für jede endliche Sprache L ein NFA existiert, das L akzeptiert.

10. Beweisen Sie, dass kein NFA existiert, das die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält gleich viele } a\text{'s und } b\text{'s}\}$$

akzeptiert.

11. Beweisen Sie, dass kein NFA existiert, das die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ akzeptiert.

12. Konstruieren Sie ein NFA, das die Sprache $L = \{ab, aba\}^*$ akzeptiert.

13. Konstruieren Sie ein NFA, das die Sprache

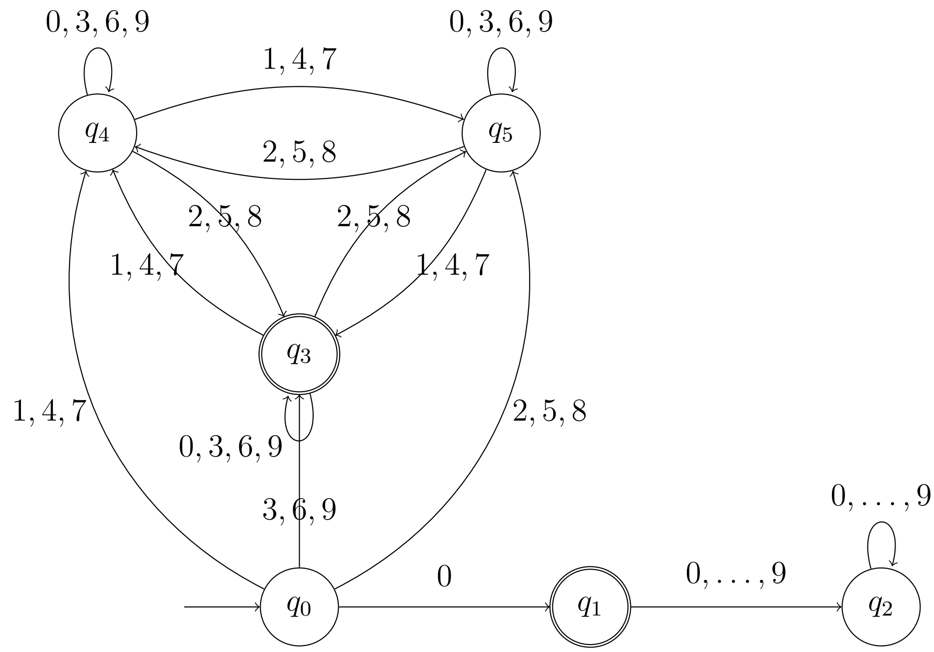
$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$

akzeptiert.

14. Beweisen Sie, dass kein NFA existiert, das die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ akzeptiert.

15. Es ist ein Algorithmus für einen Getränkeautomaten zu entwerfen. Der Getränkeautomat verkauft genau 1 Sorte von Getränk: NFA Cola. Ein NFA Cola kostet \$1.50. Wegen seiner Bauweise können in den Getränkeautomat \$1 und \$0.50 Münzen eingeworfen werden. Definieren Sie ein Alphabet und ein NFA, das den Getränkeautomaten steuert!

16. Beschreiben Sie die Sprache, die von folgendem DFA (Alphabet $\{0, \ldots, 9\}$) erkannt wird:



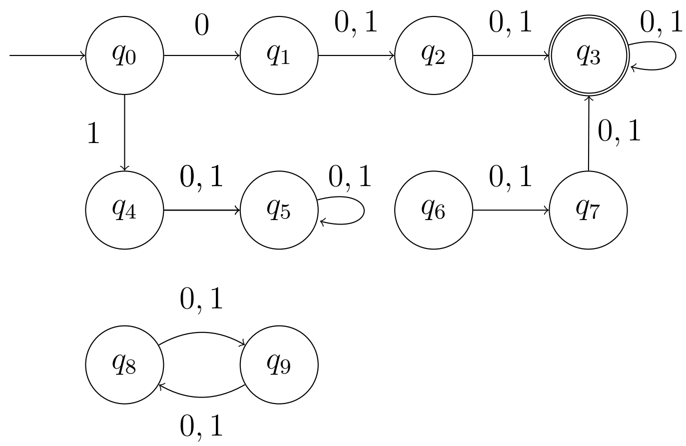
17. Sei A ein DFA mit n Zuständen. Beweisen Sie: $T(A) \neq \emptyset$ genau dann wenn A ein Wort w mit $|w| < n$ akzeptiert.

18. Beschreiben Sie informell einen Algorithmus der, gegeben Automaten A_1, A_2, entscheidet ob $T(A_1) = T(A_2)$. Hinweis: Betrachten Sie die Sprache $(T(A_1) \cap \overline{T(A_2)}) \cup (\overline{T(A_1)} \cap T(A_2))$ und wenden Sie das Resultat aus Aufgabe (17) an.

19. Sei $A = \langle Q, \mathcal{A}, \delta, q_0, F \rangle$ ein DFA und $q \in Q$. Wir legen fest:

   - q ist *erreichbar* falls es ein Wort w gibt sodass $\delta^*(q_0, w) = q$.
   - q ist *co-erreichbar* falls es ein Wort w gibt sodass $\delta^*(q, w) \in F$.
   - q ist *trim* falls q erreichbar und co-erreichbar ist.

   Welche der Zustände in folgendem DFA sind erreichbar, co-erreichbar, trim?



20. Beschreiben Sie die Sprache, die von der folgenden kontextfreien Grammatik $\langle V, T, P, S\rangle$ generiert wird: $V = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}, P = \{S \to aB, S \to bA, A \to a, A \to aS, A \to BAA, B \to b, B \to bS, B \to ABB\}$.

21. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik, die im Alphabet $\{a, b, c\}$ die Sprache

    $L = \{xc^n \mid n \in \mathbb{N}, x \in \{a, b\}^*$ und die Anzahl von a's ist n oder die Anzahl von b's ist $n\}$

    generiert.

22. Konstruieren Sie eine Turing Maschine, die Transposition durchführt: $01^x q_1 01^y 0 \Rightarrow 01^y q_0 01^x 0$, *wobei keine neuen Zellen links und rechts hinzugefügt werden sollen.*

23. Konstruieren Sie eine Turing Maschine, die Duplikation durchführt: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 01^x 0$.

24. Konstruieren Sie eine Turing Maschine, die die Funktion $f(x, y) = x - y$ berechnet (insbesondere soll die Maschine nicht halten, falls $x < y$): $q_1 01^x 01^y 0 \Rightarrow q_0 01^{x-y} 0$.

25. Gibt es Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht durch eine Turing Maschine berechnet werden können? Begründen Sie Ihre Antwort!

26. Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform für folgende Formeln:

    (a) $(((X \supset Y) \supset (Z \supset X)) \supset X) \supset X$
    (b) $\neg(X \supset Y) \supset (\neg Y \vee (Z \supset X)) \wedge Z$
    (c) $X \wedge (Y \vee \neg Z) \vee Z \wedge (\neg Y \vee X)$

27. Welche der Begriffe *gültig* / *erfüllbar* / *nicht gültig* / *unerfüllbar* treffen auf nachfolgende Formeln zu?

    (a) $(X \supset Y) \supset ((X \supset Z) \wedge Z)$
    (b) $(X \supset Y) \supset ((X \supset Z) \vee X)$

(c) $(X \vee \neg X) \supset (\neg(X \vee \neg X) \wedge (X \vee Y \vee Z))$ (Begründung!)

28. Welche der nachfolgenden Hornformeln sind erfüllbar?

    (a) $(X1 \Rightarrow X2) \wedge (1 \Rightarrow X4) \wedge (X4 \wedge X2 \Rightarrow X5) \wedge (1 \Rightarrow X1) \wedge$
    $(X1 \wedge X2 \wedge X3 \Rightarrow X6) \wedge (X6 \Rightarrow X7) \wedge (X5 \wedge X6 \Rightarrow 0) \wedge (1 \Rightarrow X3)$

    (b) $(X1 \Rightarrow X2) \wedge (1 \Rightarrow X4) \wedge (X4 \wedge X2 \Rightarrow X5) \wedge (1 \Rightarrow X1) \wedge$
    $(X1 \wedge X2 \wedge X3 \Rightarrow X6) \wedge (X6 \Rightarrow X7) \wedge (X5 \wedge X6 \Rightarrow 0) \wedge (1 \Rightarrow X7)$

29. Welche der Begriffe *gültig* / *erfüllbar* / *nicht gültig* / *unerfüllbar* treffen auf nachfolgende Formeln zu?

    (a) $(\forall x)(\exists y)(A(x) \wedge \neg A(y)) \wedge (\forall z)(A(z) \vee \neg A(z))$

    (b) $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \supset (\exists y)(\forall x)P(x, y)$

    (c) $(\exists y)(\forall x)P(x, y) \supset (\forall x)(\exists y)P(x, y)$ (Begründung!)

30. Geben Sie eine Herbrand Disjunktion für folgende Formel an:

$$(\exists x)(P(f(f(x))) \supset P(x)).$$

31. Leiten Sie in **LK** her:

$$A \supset B, B \supset C \longrightarrow A \supset C \vee D.$$

32. Leiten Sie in **LK** her:

$$\neg(A \supset B), A \supset C \longrightarrow \neg(C \supset B).$$

33. Leiten Sie in **LK** her:

$$\longrightarrow ((\forall x P(x) \supset \exists x Q(x)) \wedge \neg \exists x Q(x)) \supset \neg \forall x P(x).$$

34. Leiten Sie in **LK** her:

$$\exists x P(x) \longrightarrow \forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset \exists x Q(x).$$

35. Beschreiben Sie die schnittfreien Herleitungen von

$$P(0), \forall x(P(x) \supset P(f(x))) \longrightarrow P(f^{2^n}(0))$$

    wobei $f^0(t) \equiv t$, $f^{n+1}(t) \equiv f(f^n(t))$. Gibt es kurze (d.h. polynomiale) Herleitungen mit Schnitt?

36. Geben Sie eine Klauselform für nachfolgende Formel an:

$$(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z).$$

37. Geben Sie eine strukturelle Klauselform für nachfolgende Formel an:

$$(X \supset Y) \supset Z.$$

38. Widerlegen Sie folgende Klauselmenge durch Resolution:

$$\{P, \neg P \vee \neg Q \vee R, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R, Q \vee R, \neg Q \vee R, Q \vee \neg R, \neg Q \vee \neg R\}.$$

39. Widerlegen Sie die Hornformeln von Aufgabe (28) als Klauselmengen aufgefasst durch Resolution sofern sie widerlegbar sind.

40. Widerlegen Sie folgende Klauselmenge durch Resolution:

$$\{\neg U \vee V \vee W, \neg U \vee \neg V \vee W, \neg U \vee V \vee \neg W, \neg V \vee \neg W, U\}$$

Ist diese Menge durch Unit-Resolution widerlegbar?

41. Beweisen Sie mittels Resolution:

$$((A \wedge B \wedge C) \supset \neg(A \wedge B \wedge C)) \supset \neg(A \wedge B \wedge C).$$

42. Beweisen Sie mittels Resolution:

$$((A \supset B) \wedge (B \supset C) \wedge (C \supset D) \wedge (D \supset E)) \supset (A \supset E)$$

43. Geben Sie für folgende Formel ein Termmodel an:

$$P(0) \wedge \forall x(P(x) \supset P(s(x))).$$

44. Berechnen Sie einen allgemeinsten Unifikator oder zeigen Sie dass es keinen Unifikator gibt:

    (a) $f(h(z), x, f(x, y, z))$ und $f(y, h(y), u)$

    (b) $f(h(z), x, h(x))$ und $f(y, h(y), z)$

    (u, x, y, z Variablen)

45. Widerlegen Sie nachfolgende Klauselmengen oder geben Sie ein Termmodell an:

    (a) $\{P(0), \neg P(x) \vee P(f(x)), \neg P(f(f(0)))\}$

    (b) $\{P(0), \neg P(x) \vee P(f(x))\}$ (0 Konstante)

46. Widerlegen Sie nachfolgened Klauselmenge:

$$\{\neg P(x) \vee \neg P(y), P(0) \vee Q(0), \neg Q(x) \vee \neg Q(y)\} \qquad \text{(0 Konstante).}$$

47. Widerlegen Sie folgende Klauselmenge:

$\{\neg P(x,y,z)\vee P(y,x,z), \neg P(x,y,z)\vee P(z,y,x), \neg P(x,y,z)\vee P(x,z,y), P(A,B,C), \neg P(C,A,B)\}$

$(A, B, C$ Konstanten$)$

48. Bestimmen Sie eine Klauselform von

$$\neg(\forall x\exists y P(x,y) \supset \forall x\exists u\forall v(P(x,u) \wedge P(u,v)).$$

49. Bestimmen Sie eine Klauselform von

$$\neg(\exists x\forall y\exists z(P(x) \wedge (P(y) \vee P(z)) \supset \exists x\forall y\exists z(P(x) \wedge (P(y) \vee P(z))))).$$

50. Beweisen Sie mittels Resolution:

$$(\forall x(P(x) \supset Q(x)) \wedge \exists x P(x)) \supset \exists x Q(x).$$