

# Beispiele für Übung 3

## 1 Kinematik des Kontinuums

### 1.1 Verzerrungstensor bei gegebener Deformation

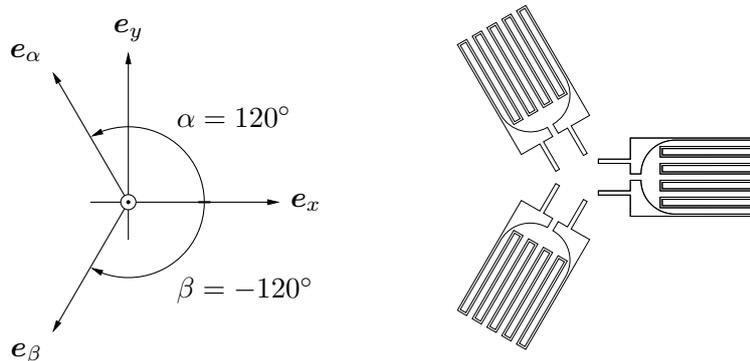
Gegeben ist eine Deformation in materieller Beschreibung:

$$\begin{aligned}x &= \xi + \epsilon(0.3\xi + 0.1\eta), \\y &= \eta + \epsilon(-0.1\xi + 0.2\eta).\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Verformung eines Quadrats  $\xi \in [0, 1]$ ,  $\eta \in [0, 1]$  und berechnen Sie den *Deformationsgradiententensor*, den *Verschiebungsgradiententensor* und den *Greenschen Verzerrungstensor*.

### 1.2 Dehnmessstreifen

Für die dargestellte Anordnung von 3 Dehnmessstreifen sollen die Komponenten des ebenen Verzerrungstensors  $\varepsilon_{ij}$  bestimmt werden. Die Dehnmessstreifen liefern die Normalverzerrungen  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_x$  in den Richtungen  $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_x$ .



### 1.3 Polare Zerlegung des Deformationsgradiententensors

Für den Deformationsgradiententensor gegeben durch:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ist die polare Zerlegung  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$  zu bilden, wobei für den Strecktensor  $\mathbf{U}$  zusätzlich die Hauptstreckungen  $\lambda_i$  mit zugehörigen Richtungen  $\mathbf{v}_i$  anzugeben sind.

## 1.4 Hauptverzerrungen

Für den ebenen Verzerrungstensor gegeben durch:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 7/4 & 5\sqrt{3}/4 \\ 5\sqrt{3}/4 & -3/4 \end{bmatrix}$$

sind die Hauptverzerrungen gesucht. In welchen Richtungen  $\mathbf{v}_i$  sind diese wirksam und welche Gestalt hat der Verzerrungstensor bei Darstellung in der Vektorbasis  $\mathbf{v}_i$ ?

## 1.5 Hauptschubverzerrungen

Der ebene Verzerrungstensor  $\varepsilon$  hat in der Basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  die Hauptachsendarstellung:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Wie groß sind die Normalverzerrung  $\varepsilon_{rr}$  und die Schubverzerrung  $\varepsilon_{r\varphi}$  in einer um  $\varphi$  gegenüber  $\mathbf{i}$  verdrehten Richtung  $\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$ ? Für welchen Winkel  $\varphi^*$  wird die Schubverzerrung maximal?

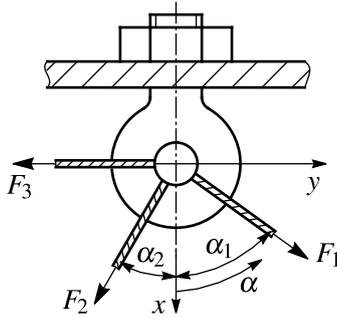
## 1.6 Theoriefragen

1. Wie lautet die materielle Zeitableitung für eine skalare Feldgröße in Eulerscher Darstellung  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ?
2. Was bedeuten die Bedingungen der Stetigkeit und der Ein-Eindeutigkeit für die Bewegung eines klassischen Kontinuums?
3. Richtig oder falsch? Unter  $\varphi(\boldsymbol{\xi}, t)$  versteht man die materielle Beschreibung einer Feldgröße  $\varphi$ , wenn die Lage des Körpers zum Referenzzeitpunkt  $\tau$  gegeben ist durch:  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t = \tau) = \boldsymbol{\xi}$ .
4. Welcher Perspektive (Lagrange / Euler) sind der Green- beziehungsweise der Almansi-Verzerrungstensor zugeordnet?
5. Welche Arten von Verzerrungen unterscheidet man, an welchen Positionen des Verzerrungstensors stehen sie und welche Verformungsmechanismen sind mit ihnen verknüpft?
6. Wie lässt sich die Normalverzerrung in einer Richtung  $\mathbf{e}_r$  bei gegebenem Verzerrungstensor  $\varepsilon$  gewinnen?
7. Gegeben ist eine Starrkörperbewegung  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\xi}$  mit einem konstanten Vektor  $\mathbf{x}_0$  und einem Rotationstensor  $\mathbf{B}$ . Wie lauten der Deformationsgradiententensor  $\mathbf{F}$  und der Strecktensor  $\mathbf{U}$  für diese Deformation?
8. Welche Eigenschaften hat der Green-Verzerrungstensor und was bedeuten diese Eigenschaften für die Lösung des Eigenwertproblems?

9. Gegeben ist der Verzerrungstensor für allseitigen Zug  $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$  mit der Konstanten  $\varepsilon_0$ . Wie groß sind die maximalen Schubverzerrungen für diesen Verzerrungszustand?
10. Wie sind der Green-, der Almansi- und der linearisierte Verzerrungstensor im Fall sehr kleiner Verzerrungen miteinander verknüpft?

## 2 Beispiele zu Kräftegleichgewichten

### 2.1 Haken mit drei Seilen

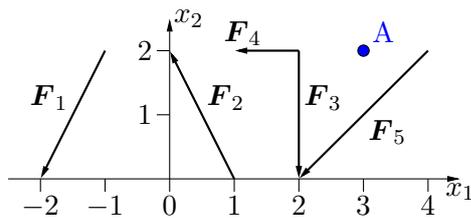


In einem Rundhaken sind drei Seile angebracht, über die Zugkräfte übertragen werden. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Resultierenden dieser drei Kräfte.

**Geg.:**  $F_1, F_2, F_3, \alpha_1, \alpha_2$ ;

**Ges.:**  $R, \alpha$ .

### 2.2 Ebenes Kraftsystem

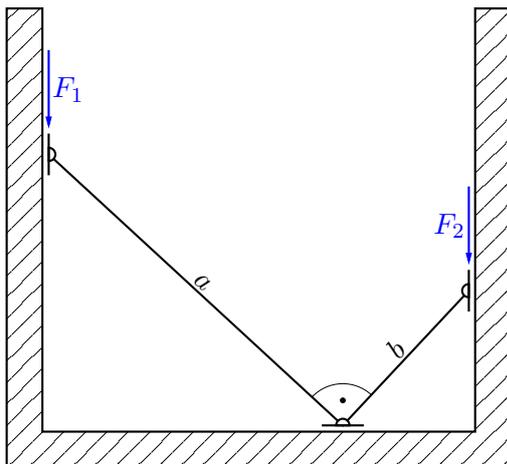


Gegeben ist ein ebenes Kraftsystem gemäß Skizze (alle Angaben in N):

$$\mathbf{F}_1 = (-1, -2)^T, \quad \mathbf{F}_2 = (-1, 2)^T, \quad \mathbf{F}_3 = (0, -2)^T, \\ \mathbf{F}_4 = (-1, 0)^T, \quad \mathbf{F}_5 = (-2, -2)^T.$$

Man berechne die Resultierende  $\mathbf{R}$  und die Momente  $M_0$  und  $M_A$  um die Punkte 0 und  $\mathbf{A} = (3, 2)$ . Die Längen in der Skizze sind in m gegeben.

### 2.3 Angelehnte Stäbe im Gleichgewicht

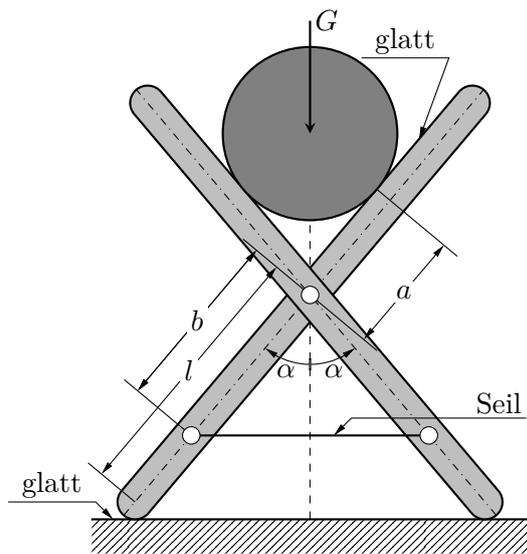


Die skizzierten homogenen Stäbe der Länge  $a$  bzw.  $b$  sind gelenkig miteinander verbunden und stützen sich horizontal bzw. vertikal an drei Punkten gegen die umgebende Wand ab. Wie durch die Gleitführungen angedeutet, soll der Kontakt mit der Wand reibungsfrei sein. In der betrachteten Gleichgewichtslage stehen die beiden Stäbe orthogonal zueinander.

**Geg.:** Externe Kräfte  $F_1, F_2$ ; Längen der Stäbe  $a, b$

**Ges.:** Reaktionskräfte in den Berührungspunkten

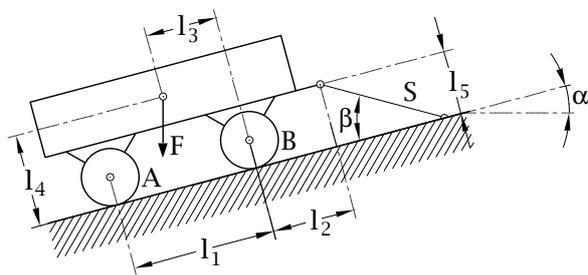
### 2.4 Sägebock



Für den durch ein Gewicht  $G$  belasteten, idealisierten Sägebock sollen alle Auflagerkräfte, sowie die zwischen den starren Körpern auftretenden Zwangskräfte berechnet werden. Der Bock wird als gewichtslos angenommen; seine Dicke ist vernachlässigbar. Alle Kontakte zwischen den Körpern werden als reibungsfrei angenommen.

### 2.5 Wagen auf schiefer Ebene

Ein Wagen mit Gesamtlast  $F$  steht auf einer unter  $\alpha$  geneigten Ebene und wird durch ein Seil  $S$ , das mit der Ebene einen Winkel  $\beta$  einschließt, gehalten. Die Längenmaße  $l_1$  bis  $l_5$  sind bekannt.



Ihre Aufgaben:

1. Machen Sie das System frei und zeichnen Sie alle eingepprägten Kräfte und Bindungskräfte ein.
2. Bestimmen Sie die Seilkraft  $S$ .
3. Bestimmen Sie die Achslasten bei  $A$  und  $B$ . (Es reicht die Angabe der Bestimmungsgleichungen)

### 2.6 Theoriefragen

1. Was versteht man unter der statischen Reduktion eines allgemeinen Kraftsystems?
2. Ein Kräftepaar hat das Moment  $M_A$  um den Punkt  $A$ . Wie groß ist das Moment des Kräftepaars um den Punkt  $B$ , wenn der Abstandsvektor zwischen den beiden Punkten als  $r_{AB}$  gegeben ist?
3. In welche Kategorien werden Kräfte eingeteilt?
4. Durch welche verallgemeinerten Reaktionskräfte können Sie die folgenden Symbole für Standard-Lagerungsfälle ersetzen?



5. Was versteht man unter dem Reaktionsprinzip und warum verletzen externe Kräfte dieses Prinzip nicht?
6. Trifft das Reaktionsprinzip auch auf die Schwerkraft zu?
7. Was versteht man unter einer Pendelstütze?
8. Was versteht man unter einer statisch bestimmten, was unter einer statisch unbestimmten Lagerung?