3. Kurzplenum Analytische Mechanik VU, 16.12.2019

1. **Kepler-Problem in zwei Dimensionen**

Die potentielle Energie eines Teilchens in zwei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x,y) = -G\frac{mM}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Form der Trajektorie durch die Parameterdarstellung

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{GMm^2}\Big(\frac{1}{1+e\,\cos\varphi}\Big)$$

beschrieben werden kann, wobei L den Drehimpuls bezeichnet und die Exzentrizität e ein beliebiger positiver Parameter ist.

Lösung: Um aus den beiden Gleichungen (siehe 2.Tutorium Beispiel 4)

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\Big[mr^2\dot{\varphi}\Big] = 0$$

die parametrisierte Form $r(\varphi)$ des Kepler-Orbits ausrechnen zu können, muss man zuerst alle Zeitableitungen in Ableitungen von r nach φ umschreiben. Verwendet man

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \qquad \text{und} \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2L}{mr^3}\dot{r} = -\frac{2L}{mr^3}\frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{2L^2}{m^2r^5}\frac{dr}{d\varphi},$$

so kann man mit

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\Big[\frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}\Big] = \frac{dr}{d\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{d^2r}{d\varphi^2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{2L^2}{m^2r^5}\Big(\frac{dr}{d\varphi}\Big)^2 + \frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2}$$

die radiale Gleichung umschreiben in

$$-\frac{2L^2}{m^2r^5}\Big(\frac{dr}{d\varphi}\Big)^2 + \frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0.$$

Weiter vereinfacht ergibt sich

$$\frac{2}{r^3}\Big(\frac{dr}{d\varphi}\Big)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Verwendet man die Identität

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\Big[\frac{1}{r}\Big] = \frac{d}{d\varphi}\Big[-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\Big] = \frac{2}{r^3}\Big(\frac{dr}{d\varphi}\Big)^2 - \frac{1}{r^2}\Big(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\Big)$$

so ergibt sich weiters

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\Big[\frac{1}{r}\Big] + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Setzt man die Parameterdarstellung

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}\Big(1 + e\,\cos\varphi\Big)$$

ein, so erkennt man, dass es sich dabei um eine Lösung der Differentialgleichung handelt.