1. Tutorium Analytische Mechanik VU, 02.12.2019

1. **Eindimensionale Bewegung des harmonischen Oszillators**

   Auf ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\infty, \infty)$ wirkt die Kraft
   $$F(x) = -kx,$$
   wobei k eine positive Konstante ist.

   a) Skizzieren Sie die Kraft $F(x)$ und lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

   b) Zeigen Sie explizit, dass in Ihrer Lösung die Gesamtenergie E erhalten bleibt.

   c) Wie groß ist die Schwingungsperiode und wo liegen die Umkehrpunkte $\pm\, x_{\mathrm{U}}(v_0)$ als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit v_0?

2. **Eindimensionale Bewegung im nichtlinearen Kraftfeld**

   Auf ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a})$ wirkt die Kraft
   $$F(x) = -\frac{k}{a}\frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)},$$
   wobei k und a positive Konstanten sind.

   a) Skizzieren Sie $F(x)$ und schreiben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung an.

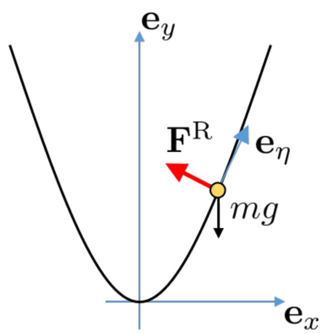
   b) Zeigen Sie, dass die zugehörige potentielle Energie gegeben ist durch
   $$V(x) = \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) + C,$$
   wobei C eine beliebige Konstante ist. Wählen sie $C = 0$.

   c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen bei $x(0) = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0. Verwenden Sie die Energieerhaltung um die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$ als Funktion von Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Position x zu bestimmen. Wo liegen die Umkehrpunkte $\pm\, x_{\mathrm{U}}(v_0)$?

   d) Zeigen Sie, dass für die „inverse“ Beziehung $t(x)$ die folgende Relation gilt
   $$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(v_0, x')}dx'$$
   und berechnen Sie damit die Trajektorie $x(t)$ mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.
   Hinweis:
   $$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - b\tan^2(ax')}}dx' = \frac{1}{a\sqrt{1+b}}\arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right) \quad \text{für} \quad b \geq 0$$

   e) Wie groß ist die Schwingungsperiode? Erklären Sie das Verhalten in den beiden Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Anfangsgeschwindigkeit v_0.

3. **Teilchen auf Parabel**



Ein Teilchen in zwei Dimensionen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Parabel

$$y = \frac{a}{2}x^2.$$

Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen die Parabel nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_{\mathrm{G}} = -mg\mathbf{e}_y$.

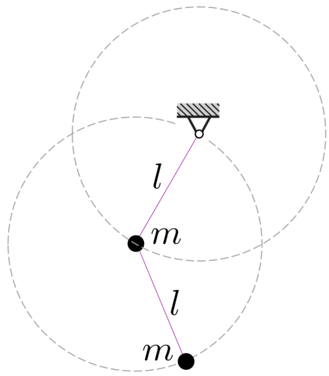
a) Wie laut die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordianten (x, y) des Teilchens? Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate gegeben ist durch $q_1 = \eta \in \mathbb{R}$ mit

$$x(\eta) = \eta$$
$$y(\eta) = \frac{a}{2}\eta^2$$

c) Schreiben Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ an und projizieren Sie diese auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta$. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung der generalisierten Koordinate $\ddot{\eta} = f(\eta, \dot{\eta})$.

4. **Doppelpendel in der Ebene**



Betrachten Sie ein Pendel mit Länge l und Masse m an das ein zweites Pendel mit Länge l und Masse m angeschlossen ist (Doppelpendel). Alle Verbindungen können frei rotieren und das gesamte System befinde sich in einem homogenen Gravitationsfeld.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen an die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Teilchen. Handelt es sich dabei um holonome Zwangsbedingungen? Sind die Zwangsbedingungen skleronom oder rheonom?

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Konstruieren Sie geeignete generalisierte Koordinaten q_i und geben Sie die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) als Funktionen der generalisierten Koordinaten an.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cd/2e/3/4