Lösungen zum 1. Tutorium Analytische Mechanik VU, 02.12.2019

1. **Eindimensionale Bewegung des harmonischen Oszillators**

   Auf ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\infty, \infty)$ wirkt die Kraft
   $$F(x) = -kx,$$
   wobei k eine positive Konstante ist.

   a) Skizzieren Sie die Kraft $F(x)$ und lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung unter der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

   Lösung:

   Die Newtonsche Bewegungsgleichung
   $$m\ddot{x} = -kx$$
   lässt sich mit dem Exponentialansatz $x(t) = Ce^{\lambda x}$ lösen. Man erhält $\lambda_{12} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}x = \pm i\omega x$. Mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man
   $$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t).$$

   b) Zeigen Sie explizit, dass in Ihrer Lösung die Gesamtenergie E erhalten bleibt.

   Lösung:

   Die Gesamtenergie $E = T + V$ ist die Summe aus kinetischer Energie
   $$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$
   und potentieller Energie
   $$V(x) = -\int F(x)dx = \frac{kx^2}{2} + C.$$
   Die Konstante C kann man frei wählen. Wir wählen $C = 0$. Man erhält
   $$E = \frac{m}{2}\Big(v_0\cos(\omega t)\Big)^2 + \frac{k}{2}\Big(\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\Big)^2 = \frac{mv_0^2}{2}$$

c) Wie groß ist die Schwingungsperiode und wo liegen die Umkehrpunkte $\pm\, x_{\rm U}(v_0)$ als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Lösung:

Die Schwingungsperiode ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

und die Umkehrpunkt liegen bei

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_{\rm U}^2}{2} \quad\longrightarrow\quad x_{\rm U} = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

2. **Eindimensionale Bewegung im nichtlinearen Kraftfeld**

Auf ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a})$ wirkt die Kraft

$$F(x) = -\frac{k}{a}\frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)},$$

wobei k und a positive Konstanten sind.

a) Skizzieren Sie $F(x)$ und schreiben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung an.

Lösung:

Die Kraft divergiert bei $x = \pm\frac{\pi}{2a}$. Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{k}{a}\frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)}.$$

b) Zeigen Sie, dass das zugehörige Potential gegeben ist durch

$$V(x) = \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Wählen Sie $C = 0$.

Lösung:

Für das Potential erhält man durch Integration

$$V(x) = -\int F(x)dx = \frac{k}{a}\int \frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)}dx = \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) + C$$

oder umgekehrt

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) = -\frac{k}{a}\frac{\sin(ax)}{\cos^3(ax)}.$$

c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen bei $x(0) = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0. Verwenden Sie die Energieerhaltung um die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$ als Funktion von Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Position x zu bestimmen. Wo liegen die Umkehrpunkte $\pm\, x_{\mathrm{U}}(v_0)$?

Lösung:

Die Gesamtenergie ist $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax)$. Man erhält

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) \longrightarrow v = \pm\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2}\tan^2(ax)}.$$

Die Umkehrpunkte liegen bei

$$v(v_0, x_{\mathrm{U}}) = 0 \longrightarrow v_0^2 = \frac{k}{ma^2}\tan^2(ax_{\mathrm{U}}) \longrightarrow x_{\mathrm{U}} = \pm\frac{1}{a}\arctan\left(\sqrt{\frac{ma^2v_0^2}{k}}\right)$$

d) Zeigen Sie, dass für die „inverse" Beziehung $t(x)$ die folgende Relation gilt

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(v_0, x')}dx'$$

und berechnen Sie damit die Trajektorie $x(t)$ mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.
Hinweis:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - b\tan^2(ax')}}dx' = \frac{1}{a\sqrt{1+b}}\arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right) \quad \text{für} \quad b > 0$$

Lösung:

Es gilt

$$dt = \frac{1}{v}dx \longrightarrow \int_{t(x_0)}^{t(x)} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{v(E, x')}dx' \longrightarrow t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(E, x')}dx',$$

wobei verwendet wurde, dass zur Anfangszeit $x(0) = x_0 = 0$ gilt. Einsetzten liefert das Integral

$$\begin{aligned} t(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2}\tan^2(ax')}}dx' \\ &= \frac{1}{v_0}\frac{1}{a\sqrt{1+b}}\arcsin\left(\sqrt{1+b}\sin(ax)\right) \end{aligned}$$

mit $b = \frac{k}{ma^2v_0^2}$ und umgekehrt

$$x(t) = \frac{1}{a}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+b}}\sin\left(v_0at\sqrt{1+b}\right)\right).$$

e) Wie groß ist die Schwingungsperiode? Erklären Sie das Verhalten in den beiden Grenzfälle sehr großer und sehr kleiner Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Lösung:

Die Schwingungsperiode ist

$$T = \frac{2\pi}{v_0 a\sqrt{1+b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(v_0^2 a^2 + \frac{k}{m})}}.$$

Im Grenzfall kleiner Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 \approx 0$ erhält man das Resultat des harmonischen Oszillators

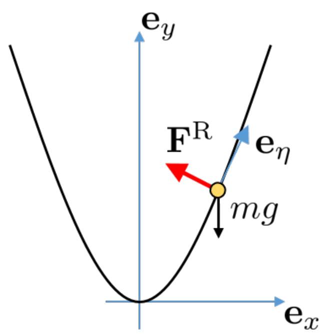
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(v_0^2 a^2 + \frac{k}{m})}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Im Grenzfall hoher Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 \to \infty$ erhält man das Resultat

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{v_0^2 a^2 + \frac{k}{m}}} \approx \frac{1}{v_0}\frac{2\pi}{a} \approx \frac{2L}{v_0},$$

welches einem Teilchen entspricht, das mit konstanter Geschwindigkeit v_0 zwischen zwei harten Wänden im Abstand L hin und her reflektiert wird.

3. **Teilchen auf Parabel**



Ein Teilchen in zwei Dimensionen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Parabel

$$y = \frac{a}{2}x^2.$$

Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen die Parabel nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_{\mathrm{G}} = -mg\mathbf{e}_y$.

a) Wie laut die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordianten (x, y) des Teilchens? Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?

Lösung:

Es gilt die skleronome holonome Zwangsbedingung

$$f(x, y) = \frac{a}{2}x^2 - y = 0.$$

b) Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate gegeben ist durch $q_1 = \eta$ mit

$$x(\eta) = \eta$$
$$y(\eta) = \frac{a}{2}\eta^2$$

Lösung:

Die generalisierte Koordinate berücksichtigt die Zwangsbedingung, denn es gilt für alle Werte $\eta \in \mathbb{R}$

$$f\big(x(\eta), y(\eta)\big) = \frac{a}{2}\eta^2 - \frac{a}{2}\eta^2 = 0$$

und weiters kann jeder Punkt auf der Parabel durch die generalisierte Koordinate η erreicht werden.

c) Schreiben Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ an und projizieren Sie diese auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta$. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung der generalisierten Koordinate $\ddot{\eta} = h(\eta, \dot{\eta})$.

Lösung:

Die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ in kartesischen Koordinaten lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_y + \mathbf{F}^{\mathrm{R}}.$$

Der Einheitsvektor ist gegeben durch

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2\eta^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ a\eta \end{pmatrix}$$

Projektion der Bewegungsgleichung auf $\mathbf{e}_\eta$ ergibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\eta = -mg\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta + \mathbf{F}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{e}_\eta = -mg\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta.$$

Aus

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\eta = \frac{\ddot{\eta} + a^2\eta^2\ddot{\eta} + \eta\dot{\eta}^2}{\sqrt{1 + a^2\eta^2}}$$

und

$$-mg\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta = \frac{-mga\eta}{\sqrt{1 + a^2\eta^2}}$$

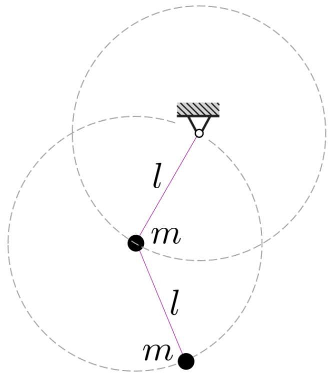
folgt

$$\frac{\ddot{\eta} + a^2\eta^2\ddot{\eta} + a^2\eta\dot{\eta}^2}{\sqrt{1 + a^2\eta^2}} = \frac{-ga\eta}{\sqrt{1 + a^2\eta^2}}.$$

Aufgelöst nach $\ddot{\eta}$

$$\ddot{\eta} = -\eta\frac{ga + a^2\dot{\eta}^2}{1 + a^2\eta^2}.$$

4. **Doppelpendel in der Ebene**



Betrachten Sie ein Pendel mit Länge l und Masse m an das ein zweites Pendel mit Länge l und Masse m angeschlossen ist (Doppelpendel). Alle Verbindungen können frei rotieren und das gesamte System befinde sich in einem homogenen Gravitationsfeld.

a) Wie lauten die Zwangsbedingungen an die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Teilchen. Handelt es sich dabei um holonome Zwangsbedingungen? Sind die Zwangsbedingungen skleronom oder rheonom?

Lösung:

Die Zwangsbedingungen lauten

$$x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0.$$

Beide Zwangsbedingungen sind skleronom und holonom.

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Konstruieren Sie geeignete generalisierte Koordinaten q_i und geben Sie die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) als Funktionen Ihrer generalisierten Koordinaten an.

Lösung:

Das System hat 2 Freiheitsgrade. Geeignete generalisierte Koordinaten sind die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\sin(\phi_1) \\ -l\cos(\phi_1) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\sin(\phi_1) + l\sin(\phi_2) \\ -l\cos(\phi_1) - l\cos(\phi_2) \end{pmatrix}.$$