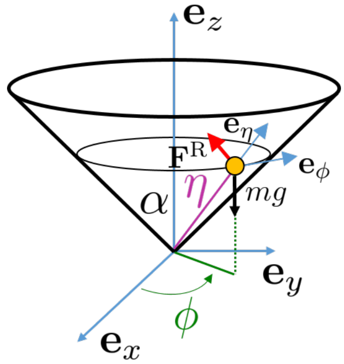
2. Tutorium Analytische Mechanik VU, 09.12.2019

1. **Teilchen auf Kegeloberfläche**



Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche eines Kegels mit Öffnungswinkel 2α. Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen die Kegeloberfläche nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_{\mathrm{G}} = -mg\mathbf{e}_z$. Verwenden Sie η und ϕ als generalisierte Koordinaten

$$\begin{aligned} x(\eta, \phi) &= \eta \sin(\alpha) \cos(\phi) \\ y(\eta, \phi) &= \eta \sin(\alpha) \sin(\phi) \\ z(\eta, \phi) &= \eta \cos(\alpha). \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\eta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und zeigen Sie die folgenden Relationen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

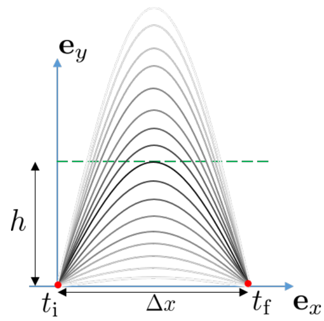
$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \eta \mathbf{e}_\eta \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\eta}\mathbf{e}_\eta + \eta\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\eta} - \eta\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\eta + (2\dot{\eta}\dot{\phi} + \eta\ddot{\phi})\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi + \eta\dot{\phi}^2\cos(\alpha)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

b) Wie lautet die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten η, ϕ?

c) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten η, ϕ indem Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ auf die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\eta$ und $\mathbf{e}_\phi$ projizieren.

d) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten η, ϕ indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen verwenden.

2. **Wurfparabel**



Zwei Personen stehen im Abstand Δx und wollen sich einen Ball so zuwerfen, dass dieser genau nach $\Delta t = t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{i}} = 1s$ bei der anderen Person ankommt. Wie hoch h muss der Ball dafür geworfen werden?

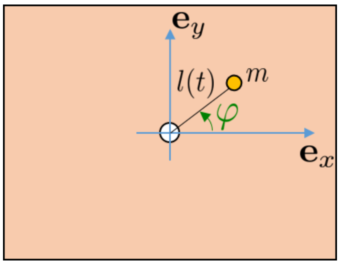
a) Lösen Sie das Problem zuerst mithilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung.

b) Lösen Sie das Problem erneut mithilfe des Hamilton'schen Variationsprinzips, indem Sie eine ganze Parabelschar durch

$$\mathbf{r}_h(t) = \begin{pmatrix} \tau\Delta x \\ 4h\Big(1-\tau\Big)\tau \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{t - t_{\mathrm{i}}}{\Delta t}$$

parametrisieren und die richtige Wurfparabel durch ihre extremale Wirkung bezüglich Variation der Höhe h identifizieren. Skizzieren Sie die Wirkung der Parabeln als Funktion der Höhe h.

3. **Spiralbewegung**



Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche eines Tisches. An dem Teilchen sei eine masselose Schnur befestigt, welche mit konstanter Geschwindigkeit c durch ein Loch in der Tischplatte gezogen wird. Anfänglich zur Zeit $t = 0$ habe das Teilchen die Winkelgeschwindigkeit ω_0 und die Schnurlänge sei $l(0) = l_0$.

a) Wie lautet die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordinaten (x, y) des Teilchens. Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate φ gegeben ist durch

$$x(\varphi, t) = (l_0 - ct)\cos(\varphi)$$
$$y(\varphi, t) = (l_0 - ct)\sin(\varphi)$$

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung auf und berechnen Sie die generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit, mit $\varphi(0) = 0$.

4. **Kepler-Problem in zwei Dimensionen**

Die potentielle Energie eines Teilchens in zwei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x, y) = -G\frac{mM}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten

$$x(r, \varphi) = r\cos(\varphi)$$
$$y(r, \varphi) = r\sin(\varphi)$$

und stellen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen auf.

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ eine Erhaltungsgröße ist.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1ab/1c/1d/2/3/4