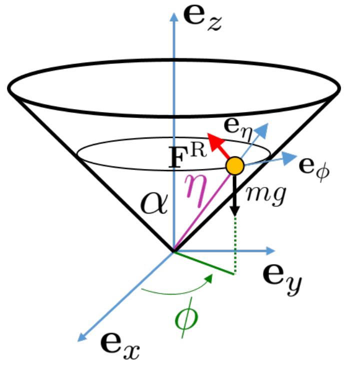
Lösungen zum 2. Tutorium Analytische Mechanik VU, 09.12.2019

1. **Teilchen auf Kegeloberfläche**



Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche eines Kegels mit Öffnungswinkel 2α. Durch eine Zwangsbedingung kann das Teilchen die Kegeloberfläche nicht verlassen. Zusätzlich wirke auf das Teilchen die Gravitationskraft $\mathbf{F}_{\mathrm{G}} = -mg\mathbf{e}_z$. Verwenden Sie η und ϕ als generalisierte Koordinaten

$$x(\eta, \phi) = \eta \sin(\alpha) \cos(\phi)$$
$$y(\eta, \phi) = \eta \sin(\alpha) \sin(\phi)$$
$$z(\eta, \phi) = \eta \cos(\alpha).$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\eta$ und $\mathbf{e}_\phi$ und zeigen Sie die folgenden Relationen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\mathbf{r} = \eta \mathbf{e}_\eta$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\eta}\mathbf{e}_\eta + \eta\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\eta} - \eta\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\eta + (2\dot{\eta}\dot{\phi} + \eta\ddot{\phi})\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi + \eta\dot{\phi}^2\cos(\alpha)\mathbf{e}_z$$

Lösung:

Die Einheitsvektoren sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha)\cos(\phi), \\ \sin(\alpha)\sin(\phi) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi), \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Position gilt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \eta\sin(\alpha)\cos(\phi), \\ \eta\sin(\alpha)\sin(\phi) \\ \eta\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \eta\mathbf{e}_\eta.$$

Für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\Big[\eta \mathbf{e}_\eta\Big] = \dot{\eta}\mathbf{e}_\eta + \eta \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\eta.$$

erhält man mit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\eta = \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\mathbf{e}_\eta = \dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi$$

den Ausdruck

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\eta}\mathbf{e}_\eta + \eta\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi.$$

Für die Beschleunigung

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d^2}{dt^2}\Big[\eta \mathbf{e}_\eta\Big] = \ddot{\eta}\mathbf{e}_\eta + 2\dot{\eta}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\eta + \eta\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_\eta \\ &= \ddot{\eta}\mathbf{e}_\eta + 2\dot{\eta}\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi + \eta\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_\eta\end{aligned}$$

erhält man mit

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_\eta &= \frac{d}{dt}\Big[\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi\Big] = \ddot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi + \dot{\phi}^2\sin(\alpha)\frac{\partial}{\partial\phi} \\ &= \ddot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi - \dot{\phi}^2\mathbf{e}_\eta + \dot{\phi}^2\cos(\alpha)\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

den Ausdruck

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\eta} - \eta\dot{\phi}^2)\mathbf{e}_\eta + (2\dot{\eta}\dot{\phi} + \eta\ddot{\phi})\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi + \eta\dot{\phi}^2\cos(\alpha)\mathbf{e}_z$$

b) Wie lautet die Lagrangefunktion in den generalisierten Koordinaten η, ϕ?

Lösung:

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}\Big(\dot{\eta}\mathbf{e}_\eta + \eta\dot{\phi}\sin(\alpha)\mathbf{e}_\phi\Big)^2 = \frac{m}{2}\Big(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\phi}^2\sin^2(\alpha)\Big),$$

wobei $\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$ und $\mathbf{e}_\eta^2 = \mathbf{e}_\phi^2 = 1$ ausgenutzt wurde. Die Lagrangefunktion lautet daher

$$L(\eta, \phi, \dot{\eta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2}\Big(\dot{\eta}^2 + \eta^2\dot{\phi}^2\sin^2(\alpha)\Big) - mg\cos(\alpha)\eta$$

c) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten η, ϕ indem Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ auf die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\eta$ und $\mathbf{e}_\phi$ projizieren.

Lösung:

Die Newton'sche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\mathbf{F}^{\mathrm{R}}$ in kartesischen Koordinaten lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{F}^{\mathrm{R}}.$$

Projektion auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta$ ergibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\eta = -mg\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta + \mathbf{F}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{e}_\eta.$$

Mithilfe von

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{e}_\eta &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta &= \cos(\alpha) \\ \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\eta &= \ddot{\eta} - \eta\dot{\phi}^2 + \eta\dot{\phi}^2\cos^2(\alpha) = \ddot{\eta} - \eta\dot{\phi}^2\sin^2(\alpha) \end{aligned}$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\eta} = \eta\dot{\phi}^2\sin^2(\alpha) - g\cos(\alpha).$$

Projektion auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\phi$ ergibt

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\phi = -mg\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi + \mathbf{F}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{e}_\phi.$$

Mithilfe von

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{e}_\phi &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi &= 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_\phi &= (2\dot{\eta}\dot{\phi} + \eta\ddot{\phi})\sin(\alpha) \end{aligned}$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{\eta}}{\eta}\dot{\phi}$$

d) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen der generalisierten Koordinaten η, ϕ indem Sie die Euler-Lagrange Gleichungen verwenden.

Lösung:

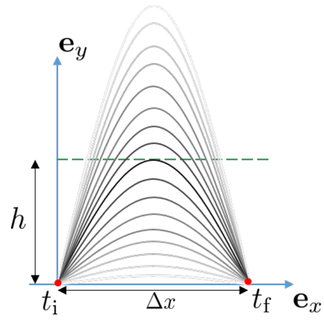
Die Euler-Lagrange Gleichung für η lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial\eta} = m\ddot{\eta} - \eta^2\dot{\phi}^2\sin^2(\alpha) + mg\cos(\alpha) = 0$$

Die Euler-Lagrange Gleichung für ϕ lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = m\frac{d}{dt}\Big(\eta^2\dot{\phi}\sin^2(\alpha)\Big) = 2m\eta\dot{\eta}\dot{\phi}\sin^2(\alpha) + m\eta^2\ddot{\phi}\sin^2(\alpha) = 0$$

2. **Wurfparabel**



Zwei Personen stehen im Abstand Δx und wollen sich einen Ball so zuwerfen, dass dieser genau nach $\Delta t = t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i} = 1s$ bei der anderen Person ankommt. Wie hoch h muss der Ball dafür geworfen werden?

a) Lösen Sie das Problem zuerst mithilfe der Newton'schen Bewegungsgleichung.

Lösung:

Die Newton'sche Bewegungsgleichung für die Wurfparabel lautet $m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_y$. Deren Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = v_x t \qquad\qquad y(t) = y_0 + v_y t - \frac{g}{2}t^2.$$

Wir setzten $y(0) = 0$ und $y(\Delta t) = 0$ so folgt $y_0 = 0$ und $v_y = \frac{g}{2}\Delta t$. Damit erhält man

$$h = y\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{g}{4}\Delta t^2 - \frac{g}{8}\Delta t^2 = \frac{g}{8}\Delta t^2$$

b) Lösen Sie das Problem erneut mithilfe des Hamilton'schen Variationsprinzips, indem Sie eine ganze Parabelschar durch

$$\mathbf{r}_h(t) = \begin{pmatrix} \tau\Delta x \\ 4h\left(1-\tau\right)\tau \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{t - t_\mathrm{i}}{\Delta t}$$

parametrisieren und die richtige Wurfparabel durch ihre extremale Wirkung bezüglich Variation der Höhe h identifizieren. Skizzieren Sie die Wirkung der Parabeln als Funktion der Höhe h.

Lösung:

Die Wirkung der Parabel mit Höhe h ist

$$S(h) = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right)dt = \Delta t \int_0^1 \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy\right)d\tau$$

Mit

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{16h^2}{\Delta t^2}(1 - 2\tau)^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{16h^2}{\Delta t^2}(1 - 4\tau + 4\tau^2)$$

und

$$mgy = 4mgh\left(\tau - \tau^2\right)$$

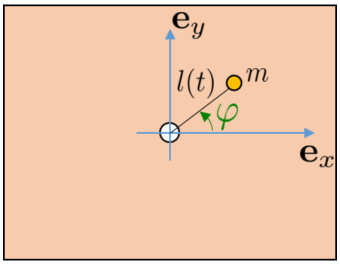
lässt sich die Wirkung der Parabel mit Höhe h berechnen zu

$$\begin{aligned} S(h) &= \Delta t \int_0^1 \Big(\frac{m}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{m}{2}\frac{16h^2}{\Delta t^2}(1-4\tau+4\tau^2) - 4mgh\Big(\tau-\tau^2\Big)\Big)d\tau \\ &= \frac{m}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \frac{m}{2}\frac{16h^2}{\Delta t}(1-\frac{4}{2}+\frac{4}{3}) - 4mgh\Delta t\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big) \\ &= \frac{m}{2\Delta t}\Big(\Delta x^2 + \frac{16h^2}{3} - \frac{8}{6}gh\Delta t^2\Big) \end{aligned}$$

Die Wirkung als Funktion der Höhe h hat ein Minimum bei

$$\frac{dS}{dh} = \frac{m}{2\Delta t}\Big(\frac{32h}{3} - \frac{8}{6}g\Delta t^2\Big) = 0 \longrightarrow h = \frac{g}{8}\Delta t^2$$

3. **Spiralbewegung**



Ein Teilchen mit Masse m gleite reibungsfrei auf der Oberfläche eines Tisches. An dem Teilchen sei eine masselose Schnur befestigt, welche mit konstanter Geschwindigkeit c durch ein Loch in der Tischplatte gezogen wird. Anfänglich zur Zeit $t = 0$ habe das Teilchen die Winkelgeschwindigkeit ω_0 und die Schnurlänge sei $l(0) = l_0$.

a) Wie lautet die Zwangsbedingung an die kartesischen Koordinaten (x, y) des Teilchens. Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom?

Lösung:

Die Zwangsbedingung ist charakterisiert durch

$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - (l_0 - ct)^2 = 0.$$

Dabei handelt es sich um eine rheonome holonome Zwangsbedigung.

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Zeigen Sie, dass eine geeignete generalisierte Koordinate φ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x(\varphi, t) &= (l_0 - ct)\cos(\varphi) \\ y(\varphi, t) &= (l_0 - ct)\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Lösung:

Das System hat einen Freiheitsgrad. Bei φ handelt es sich um einen geeignete generalisierte Koordinate da die Zwangsbedingung

$$f(x(\varphi, t), y(\varphi, t), t) = (l_0 - ct)^2 - (l_0 - ct)^2 = 0$$

für alle Werte $0 \le \varphi \le 2\pi$ und alle Zeiten t erfüllt ist.

c) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichung auf und berechnen Sie die generalisierte Koordinate $\varphi(t)$ als Funktion der Zeit, mit $\varphi(0) = 0$.

Lösung:

Die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

ist mit

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial x}{\partial t} = -(l_0 - ct)\sin(\varphi)\dot{\varphi} - c\cos(\varphi)$$

und

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial y}{\partial t} = (l_0 - ct)\cos(\varphi)\dot{\varphi} - c\sin(\varphi)$$

gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}((l_0 - ct)^2\dot{\varphi}^2 + c^2).$$

Da es keine potentielle Energie gilt ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}((l_0 - ct)^2\dot{\varphi}^2 + c^2)$$

und die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\frac{d}{dt}\Big[(l_0 - ct)^2\dot{\varphi} + c^2\Big] = 0$$

führt auf

$$(l_0 - ct)^2\dot{\varphi} = \text{const} = l_0^2\omega_0.$$

Integration der Gleichung liefert

$$\dot{\varphi} = \frac{l_0^2\omega_0}{(l_0 - ct)^2} \to \varphi(t) = \int_0^t \frac{l_0^2\omega_0}{(l_0 - ct')^2}dt' = -\frac{l_0^2\omega_0}{c}\int_{l_0}^{l(t)} \frac{1}{l^2}dl = \frac{l_0^2\omega_0}{c}\Big(\frac{1}{l_0 - ct} - \frac{1}{l_0}\Big).$$

Mit weitere Vereinfachung

$$\varphi(t) = l_0\omega_0\frac{t}{l_0 - ct}$$

4. **Kepler-Problem in zwei Dimensionen**

Die potentielle Energie eines Teilchens in zwei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x,y) = -G\frac{mM}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten

$$x(r,\varphi) = r\cos(\varphi)$$
$$y(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

und stellen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen auf.

Lösung:

Die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

ist mit

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \cos(\varphi)\dot{r} - r\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

und

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{\varphi} = \sin(\varphi)\dot{r} + r\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Mit der potentiellen Energie

$$V(r) = -G\frac{mM}{r}$$

ist die Lagrangefunktion gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + G\frac{mM}{r}$$

und die Euler-Larange Gleichungen sind

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + G\frac{mM}{r^2} = 0$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left[mr^2\dot{\varphi}\right] = 0$$

b) Zeigen Sie, dass der Drehimpuls $L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ eine Erhaltungsgröße ist.

Lösung:

Der Drehimpuls

$$L = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

und damit eine Erhaltungsgröße wie aus der Euler-Lagrange Gleichung für φ folgt.