Lösungen zum 3. Tutorium Analytische Mechanik VU, 16.12.2019

1. **Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen**

   Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch
   $$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\Big(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\Big).$$

   a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten (r,θ,φ)
   $$\begin{aligned} x(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y(r,\theta,\varphi) &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r,\theta,\varphi) &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

   Lösung:

   Es gilt für die Position $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Ableiten ergibt
   $$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$
   und daraus folgt (unter Ausnützung der Orthogonalität) für die kinetische Energie
   $$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2).$$
   Die Lagrangefunktion ist $L = T - V$ mit der potentiellen Energie
   $$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\Big(k_x r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + k_y r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + k_z r^2\cos^2(\theta)\Big).$$

   b) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_r, p_θ und p_φ.

   Lösung:

   Es gilt
   $$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

c) Identifizieren Sie im Fall

$$k_x \neq k_y \neq k_z$$

und im Fall

$$k_x = k_y \neq k_z,$$

welche der Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) zyklisch sind und bestimmen Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen.

Lösung:

Im Fall $k_x \neq k_y \neq k_z$ ist keine der Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) zyklisch.
Im Fall $k_x = k_y \neq k_z$ lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\Big(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(k_x r^2 \sin^2(\theta) + k_z r^2 \cos^2(\theta)\Big),$$

mit einer zyklischen Koordinate φ. Die Erhaltungsgröße ist

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}.$$

2. **Legendre Transformation**

Die Lagrangefunktion eines Teilchen mit Koordinate $q \in \mathbb{R}$ in einer Dimensionen sei gegeben durch den allgemeinen Ausdruck

$$L = a(q,t)\dot{q}^2 + b(q,t)\dot{q} + c(q,t) \qquad \text{mit} \qquad a(q,t) > 0.$$

a) Verwenden Sie die Relation

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p(q, \dot{q}, t)$$

und lösen Sie diese nach $\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)$ auf.

Lösung:

Es gilt

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 2a(q,t)\dot{q} + b(q,t).$$

Die Beziehung lässt sich eindeutig nach $\dot{q}$ auflösen mit

$$\dot{q} = \frac{p - b(q,t)}{2a(q,t)}$$

b) Verwenden Sie die Legendetransformation um die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ in die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ zu transformieren.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - L \\ &= 2a(q,t)\dot{q}^2 + b(q,t)\dot{q} - a(q,t)\dot{q}^2 - b(q,t)\dot{q} - c(q,t) \\ &= a(q,t)\dot{q}^2 - c(q,t) \end{aligned}$$

Ersetzen von $\dot{q}(q, p, t)$ liefert

$$H(q,p,t) = \frac{(p - b(q,t))^2}{4a(q,t)} - c(q,t)$$

c) Können Sie die Legendetransformation auch ausführen, wenn die Lagrangefunktion von $\dot{q}^3$ abhängen würde?

Lösung:

Nein, weil mit $L = \dot{q}^3 + a(q,t)\dot{q}^2 + b(q,t)\dot{q} + c(q,t)$ an der Stelle $\dot{q} = 0$ gilt dass

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = 3\dot{q} = 0$$

und sich daher die Beziehung

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 3\dot{q}^2 + 2a(q,t)\dot{q} + b(q,t)$$

nicht mehr eindeutig nach $\dot{q}$ auflösen lässt. Würde man den Definitionsbereich von $\dot{q}$ so einschränken, dass

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0$$

im gesamten Definitionsbereich gilt, dann könnte man auch die Legendetransformation ausführen.

3. **Geschwindigkeitsabhängige Kraft**

Die Lagrangefunktion eines Teilchen in zwei Dimensionen sei gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{QB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

a) Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_x und p_y. Worin unterscheiden sich diese vom mechanischen Impuls $m\dot{x}$ und $m\dot{y}$?

Lösung:

Die generalisierten Impulse p_x und p_y sind gegeben durch

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{QB}{2}y$$
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{QB}{2}x$$

und unterscheiden sich vom mechanischen Impuls durch einen zusätzlichen Term der vom Feld kommt.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten x, y. Handelt es sich bei p_x oder p_y um Erhaltungsgrößen?

Lösung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - \frac{QB}{2}\dot{y} - \frac{QB}{2}\dot{y} = m\ddot{x} - QB\dot{y} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{QB}{2}\dot{x} + \frac{QB}{2}\dot{x} = m\ddot{y} + QB\dot{x} = 0$$

Nein es gilt

$$\frac{d}{dt}p_x \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}p_y \neq 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die folgenden Trajektorien die Bewegungsgleichungen lösen

$$x(t) = C_1 \sin\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + C_2$$
$$y(t) = C_1 \cos\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + C_3,$$

wobei ϕ_0, C_1, C_2, C_3 Konstanten sind. Welches physikalische System wird hier beschrieben?

Lösung: Einsetzen liefert

$$m\ddot{x} - QB\dot{y} = -C_1\frac{Q^2B^2}{m}\sin\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + \frac{Q^2B^2}{m}C_1\sin\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) = 0$$
$$m\ddot{y} + QB\dot{x} = -C_1\frac{Q^2B^2}{m}\cos\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) + \frac{Q^2B^2}{m}C_1\cos\left(\frac{QB}{m}t + \phi_0\right) = 0$$

Es handelt sich um ein Teilchen mit Ladung Q im homogenen Magnetfeld B.

d) Transformieren Sie die Lagrangefunktion auf Polarkoordinaten (r, φ). Berechnen Sie die generalisierten Impulse p_r und p_φ und identifizieren Sie welche der Polarkoordinaten (r, φ) zyklisch sind.

Lösung:

In Polarkoordinaten (r, φ) gilt

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{QB}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Die generalisierten Impulse p_r und p_φ sind

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{QB}{2}r^2$$

Der Winkel φ ist eine zyklische Variable.

4. **Eichinvarianz der Lagrangefunktion**

Zwei Lagrangefunktionen seien gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{QB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad \text{und} \qquad \tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + QBx\dot{y}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die beiden Lagrangefunktionen nur um die totale Zeitableitung $\frac{d}{dt}F(x, y)$ einer Funktion $F(x, y)$ unterscheiden. Wie lautet $F(x, y)$?

Lösung:

Es gilt

$$\tilde{L} - L = \frac{QB}{2}(x\dot{y} + y\dot{x}) = \frac{d}{dt}F(x, y),$$

mit

$$F(x, y) = \frac{QB}{2}xy$$

b) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass beide Lagrangefunktionen zu identischen Bewegungsgleichungen führen und daher das selbe System beschreiben.

Lösung:

Nachrechnen ergibt die gleichen Bewegungsgleichungen wie in Beispiel 3 gefunden

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = m\ddot{x} - QB\dot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} = m\ddot{y} + QB\dot{x} = 0.$$

c) Berechnen Sie für die beiden Lagrangefunktionen L und $\tilde{L}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} - L \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \tilde{L}.$$

Worum handelt es sich bei dieser Größe? Ist diese eine Erhaltungsgröße?

Lösung: Die beiden Ausdrücke sind identisch:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y}-L = m\dot{x}^2-\frac{QB}{2}y\dot{x}+m\dot{y}^2+\frac{QB}{2}x\dot{y}-\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{QB}{2}(x\dot{y}-y\dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

und

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} - \tilde{L} = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + QBx\dot{y} - \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - QBx\dot{y} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Es handelt sich bei diesem Ausdruck um die Gesamtenergie, welche eine Erhaltungsgröße ist da die Lagrangefunktion nicht von der Zeit abhängt.