4. Tutorium Analytische Mechanik VU, 13.01.2020

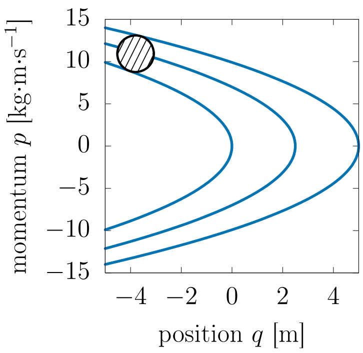
1. **Phasenraum eines Teilchens im homogenen Gravitationsfeld**

   Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im homogenen Gravitationsfeld. Das Teilchen bewege sich rein vertikal. Die vertikale Position $q \in \mathbb{R}$ ist daher der einzige Freiheitsgrad des Problems. Die potentielle Energie ist gegeben durch $V(q) = mgq$.

   a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H(q,p)$? Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

   b) Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q,p)$ in der (q,p)-Ebene (Phasenraum) sowie repräsentative zugehörige Trajektorien. Zeigen Sie, dass das Hamilton'sche Vektorfeld divergenzfrei ist. Welchem bekannten Theorem entspricht das?

   c) Skizzieren Sie die Zeitentwicklung des schraffierten Gebiets in der nebenstehenden Abbildung mit $m = 1$kg. Was kann man bezüglich der Zeitentwicklung des Flächeninhaltes sagen?



2. **Rechnen mit Poissonklammern**

   Betrachten Sie ein Teilchen in drei Dimensionen mit den Koordinaten x, y, z.

   a) Zeigen Sie mithilfe der Produktregel für Poissonklammern und der kanonischen Relation $\{x, p_x\} = 1$ die Beziehung

   $$\{f(x), p_x\} = \frac{df}{dx}$$

   Hinweis: Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Taylorreihe.

   b) Zeigen Sie, dass die Komponenten L_x, L_y, L_z des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ die folgenden Relationen erfüllen

   $$\{L_x, L_y\} = L_z \qquad \text{und} \qquad \{L_z, L_x\} = L_y \qquad \text{und} \qquad \{L_y, L_z\} = L_x.$$

   c) Zeigen Sie, dass die Poissonklammer zwischen $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ und L_z verschwindet

   $$\{L^2, L_z\} = 0.$$

3. **Isotroper harmonischer Oszillator: kartesische Koordinaten**

Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen $\mathbf{r} = (x, y, z)$ mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

Hinweis: Berechnen Sie die Poissonklammern indem Sie diese mithilfe der Rechenregeln auf die kanonischen Relationen $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ und $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ zurückführen.

a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$? Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen auch darstellen lassen als

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\mathbf{r}, H\} \qquad \text{und} \qquad \dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\}.$$

c) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ die Relation $\{\mathbf{L}, H\} = 0$ gilt. Welche Konsequenz ergibt sich daraus?

d) Zeigen Sie mithilfe der Poissonklammer, dass die folgende Größe eine Erhaltungsgröße ist

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

e) Berechnen Sie die Größe $g = \{E_x, L_y\}$. Ist g ebenfalls eine Erhaltungsgröße? Welches Vektorfeld $\mathbf{v}_g(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ generiert die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum?

4. **Isotroper harmonischer Oszillator: Kugelkoordinaten**

Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

a) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) &= r \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die zugehörigen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

c) Zeigen Sie mithilfe der Poissonklammer, dass es sich bei

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}$$

um eine Erhaltungsgröße handelt. Welches Vektorfeld $\mathbf{v}_{L^2}(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ generiert die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum?

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2a/2bc/3ab/3cde/4