Lösungen zum 4. Tutorium Analytische Mechanik VU, 13.01.2020

1. **Phasenraum eines Teilchens im homogenen Gravitationsfeld**

   Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im homogenen Gravitationsfeld. Das Teilchen bewege sich rein vertikal. Die vertikale Position $q \in \mathbb{R}$ ist daher der einzige Freiheitsgrad des Problems. Die potentielle Energie ist gegeben durch $V(q) = mgq$.

   a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H(q,p)$? Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

   Lösung:

   Die Hamiltonfunktion lautet

   $$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

   Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

   $$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

   $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg$$

   b) Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q,p)$ in der (q,p)-Ebene (Phasenraum) sowie repräsentative zugehörige Trajektorien. Zeigen Sie, dass das Hamilton'sche Vektorfeld divergenzfrei ist. Welchem bekannten Theorem entspricht das?

   Lösung: Das Hamilton'sche Vektorfeld ist gegeben durch

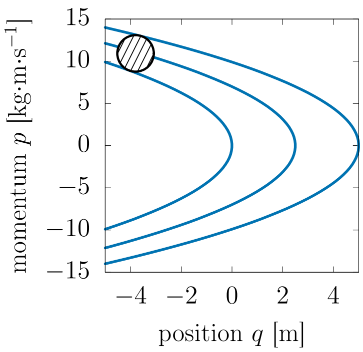
   $$\mathbf{v}_H(q,p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -mg \end{pmatrix}.$$

   Dabei handelt es sich um ein divergenzfreies Vektorfeld

   $$\operatorname{div}\Big(\mathbf{v}_H(q,p)\Big) = \frac{\partial}{\partial q}\frac{p}{m} - \frac{\partial}{\partial p}mg = 0.$$

   Dies entspricht dem Liouville Theorem (Erhaltung des Phasenraumvolumens).

c) Skizzieren Sie die Zeitentwicklung des schraffierten Gebiets in der nebenstehenden Abbildung mit $m = 1\text{kg}$. Was kann man bezüglich der Zeitentwicklung des Flächeninhaltes sagen?



Lösung:

Horizontale Abstände $(p_1 - p_2)$ bleiben im Phasenraumfluss konstant

$$\dot{p_1} = -mg \to \dot{p_1} - \dot{p_2} = 0 \to p_1 - p_2 = \text{const.}$$

Die Kreisfläche wird bei konstanter Höhe geschert. Dabei bleibt der Flächeninhalt erhalten, wie es vom Liouville Theorem gefordert wird.

2. **Rechnen mit Poissonklammern**

Betrachten Sie ein Teilchen in drei Dimensionen mit den Koordinaten x, y, z.

a) Zeigen Sie mithilfe der Produktregel für Poissonklammern und der kanonischen Relation $\{x, p_x\} = 1$ die Beziehung

$$\{f(x), p_x\} = \frac{df}{dx}$$

Hinweis: Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Taylorreihe.

Lösung:

Setzt man die Taylorreihe von $f(x)$ um x_0 in die Poissonklammer ein erhält man

$$\{f(x), p_x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \{(x - x_0)^n, p_x\}.$$

Die Poissonklammer lässt sich mit der Produktregel berechnen zu

$$\begin{aligned}
\{(x - x_0)^n, p_x\} &= (x - x_0)\left\{(x - x_0)^{n-1}, p_x\right\} + (x - x_0)^{n-1}\{(x - x_0), p_x\} \\
&= (x - x_0)\left\{(x - x_0)^{n-1}, p_x\right\} + (x - x_0)^{n-1} \\
&= n(x - x_0)^{n-1},
\end{aligned}$$

wobei die Produktregel n-mal angewendet wurde. Einsetzen ergibt

$$\{f(x), p_x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} n(x - x_0)^{n-1} = \frac{df}{dx}$$

b) Zeigen Sie, dass die Komponenten L_x, L_y, L_z des Drehimpulses $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ die folgenden Relationen erfüllen

$$\{L_x, L_y\} = L_z \qquad \text{und} \qquad \{L_z, L_x\} = L_y \qquad \text{und} \qquad \{L_y, L_z\} = L_x.$$

Lösung:

Für die einzelnen Komponenten gilt

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x.$$

Einsetzten und Verwendung der kanonischen Relationen ergibt

$$\{L_x, L_y\} = \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} = y\{p_z, z\}p_x + p_y\{z, p_z\}x = -yp_x + p_y x = L_z$$

Die anderen Relationen zeigt man analog.

c) Zeigen Sie, dass die Poissonklammer zwischen $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ und L_z verschwindet

$$\left\{L^2, L_z\right\} = 0.$$

Lösung:

Es gilt

$$\left\{L^2, L_z\right\} = \left\{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z\right\} = 2L_x\{L_x, L_z\} + 2L_y\{L_y, L_z\} = -2L_xL_y + 2L_yL_x = 0$$

3. **Isotroper harmonischer Oszillator: kartesische Koordinaten**

Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen $\mathbf{r} = (x, y, z)$ mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

Hinweis: Berechnen Sie die Poissonklammern indem Sie diese mithilfe der Rechenregeln auf die kanonischen Relationen $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ und $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$ zurückführen.

a) Wie lautet die zugehörige Hamiltonfunktion $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$? Berechnen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

Lösung:

Die Hamiltonfunktion lautet

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{r}^2.$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -k\mathbf{r}$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen auch darstellen lassen als

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\mathbf{r}, H\} \qquad \text{und} \qquad \dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\}\,.$$

Lösung:

Die Poissonklammern zwischen Vektoren und Skalare sind komponentenweise zu verstehen. Mit dieser Schreibweise erhält man

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\mathbf{r}, H\} = \left\{\mathbf{r}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{r}^2\right\} = \left\{\mathbf{r}, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}\right\} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{r}, H\} = \left\{\mathbf{p}, \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\mathbf{r}^2\right\} = \left\{\mathbf{p}, \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + y^2)\right\} = -k\mathbf{r}$$

c) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ die Relation $\{\mathbf{L}, H\} = 0$ gilt. Welche Konsequenz ergibt sich daraus?

Lösung:

Es gilt für die z-Komponente

$$
\begin{aligned}
\{L_z, H\} &= \left\{ xp_y - yp_x, \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right\} \\
&= p_y \left\{ x, \frac{p_x^2}{2m} \right\} + x \left\{ p_y, \frac{ky^2}{2}) \right\} - p_x \left\{ y, \frac{p_y^2}{2m} \right\} - y \left\{ p_x, \frac{kx^2}{2} \right\} = \\
&= \frac{p_y p_x}{m} - kxy - \frac{p_x p_y}{m} + kyx = 0
\end{aligned}
$$

Die anderen Komponenten zeigt man analog. Alle Komponenten des Drehimpulses sind Erhaltungsgrößen.

d) Zeigen Sie mithilfe der Poissonklammer, dass die folgende Größe eine Erhaltungsgröße ist

$$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

Lösung:

Die Poissonklammer zwischen der Hamiltonfunktion und E_x ist gegegben durch

$$\left\{ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, H \right\} = \left\{ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \right\} + \left\{ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{ky^2 + kz^2}{2} \right\} = 0.$$

Da die Poissonklammer verschwindet ist E_x eine Erhaltungsgröße.

e) Berechnen Sie die Größe $g = \{E_x, L_y\}$. Ist g ebenfalls eine Erhaltungsgröße? Welches Vektorfeld $\mathbf{v}_g(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ generiert die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum?

Lösung:

Die Größe g ist gegeben durch

$$g = \{E_x, L_y\} = \left\{ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, zp_x - xp_z \right\} = \frac{p_x p_z}{m} + kzx.$$

Wie aus der Vorlesung bekannt ist die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrößen wieder eine Erhaltungsgröße. Daher ist auch g eine Erhaltungsgröße. Die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum wird durch das folgende Vektorfeld generiert

$$\mathbf{v}_g(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{m} \\ 0 \\ \frac{p_x}{m} \\ -kz \\ 0 \\ -kx \end{pmatrix}.$$

4. **Isotroper harmonischer Oszillator: Kugelkoordinaten**

Lösung:

Die potentielle Energie eines Teilchens in drei Dimensionen mit Masse m sei gegeben durch

$$V(x, y, z) = \frac{k}{2}\Big(x^2 + y^2 + z^2\Big).$$

a) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y(r, \theta, \varphi) &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(r, \theta, \varphi) &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

Lösung:

Wie aus dem 3.Tutorium bekannt ist lautet die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2) - \frac{kr^2}{2}$$

mit den zugehörigen kanonischen Impulsen

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2) + \frac{kr^2}{2}.$$

Ersetzten der Ableitungen durch die kanonischen Impulse ergibt

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) + \frac{kr^2}{2}$$

b) Berechnen Sie die zugehörigen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen.

Lösung:

Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\
\dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2(\theta)} \\
\dot{p_r} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{m}\left(\frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\varphi^2}{r^3 \sin^2(\theta)}\right) - kr \\
\dot{p_\theta} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{m}\left(\frac{p_\varphi^2 \cos(\theta)}{r^2 \sin^3(\theta)}\right) \\
\dot{p_\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0
\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie mithilfe der Poissonklammer, dass es sich bei

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}$$

um eine Erhaltungsgröße handelt. Welches Vektorfeld $\mathbf{v}_{L^2}(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ generiert die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum?

Lösung:

Die Poissonklammer $\{L^2, H\} = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\{L^2, H\right\} &= \left\{p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}, \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2(\theta)}\right) + \frac{kr^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2mr^2} \underbrace{\left\{p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}, p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2(\theta)}\right\}}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

Die zugehörige Symmetrietransformation im Phasenraum wird durch das folgende Vektorfeld generiert

$$\mathbf{v}_L^2(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_r} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ -\frac{\partial H}{\partial r} \\ -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2p_\theta \\ \frac{2p_\varphi}{\sin^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{2p_\varphi^2 \cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \\ 0 \end{pmatrix}$$