

Lösungen zum 5. Tutorium Analytische Mechanik VU, 20.01.2020

1. Kanonische Transformation

Beweisen Sie, dass es sich bei der Koordinatentransformation

$$\bar{q}(q, p) = -p \quad \text{und} \quad \bar{p}(q, p) = q + Ap^2$$

(A ist eine beliebige Konstante) um eine kanonische Transformation handelt,

- a) indem Sie zeigen, dass die neuen Koordinaten (\bar{q}, \bar{p}) die kanonischen Relationen für Poissonklammern erfüllen.

Lösung:

Eine Möglichkeit zu zeigen, dass eine gegebene Transformation im Phasenraum ist kanonisch ist zu zeigen, dass die kanonischen Relationen (auch fundamentale Poissonklammern genannt)

$$\{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\bar{q}_i, \bar{p}_j\} = \delta_{ij}$$

auch in den neuen Koordinaten gelten. Im Fall eines Freiheitsgrades entspricht dies den drei Relationen

$$\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{\bar{p}, \bar{p}\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\bar{q}, \bar{p}\} = 1.$$

Die beiden Relationen

$$\{\bar{q}, \bar{q}\} = \{-p, -p\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\bar{p}, \bar{p}\} = \{q + Ap^2, q + Ap^2\} = 0$$

sind automatisch erfüllt, da die Poissonklammer anti-symmetrisch ist und daher die Poissonklammer zwischen zwei gleichen Größen verschwinden muss. Die zweite Relation wegen

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \{-p, q + Ap^2\} = \{-p, q\} = \{q, p\} = 1$$

ebenfalls erfüllt. Die Transformation ist also kanonisch.

- b) indem Sie die zugehörige erzeugende Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ konstruieren.

Lösung:

Eine weitere Möglichkeit zu zeigen, dass eine gegebene Transformation im Phasenraum ist kanonisch ist zu zeigen, es eine erzeugende Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ mit

$$p(q, \bar{q}) = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -\bar{q} \quad \text{und} \quad \bar{p}(q, \bar{q}) = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = q + A\bar{q}^2$$

gibt. Aus der ersten Relation folgt

$$F_1 = -\bar{q}q + f(\bar{q})$$

wobei $f(\bar{q})$ noch eine beliebige Funktion von \bar{q} sein kann. Aus der zweiten Relation folgt

$$-\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = q - \frac{df}{d\bar{q}} = q + A\bar{q}^2.$$

Durch Integration erhält man

$$f(\bar{q}) = -\frac{A}{3}\bar{q}^3$$

und weiters

$$F_1(q, \bar{q}) = -\bar{q}q - \frac{A}{3}\bar{q}^3.$$

2. Transformation der Hamiltonfunktion

Die Hamiltonfunktion $H(q, p)$ eines Teilchen der Masse m sei gegeben durch

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

- a) Verwenden Sie die kanonische Transformation aus Beispiel 1 und berechnen Sie die Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$ in den neuen Koordinaten (\bar{q}, \bar{p}) .

Lösung:

Die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten ist gegeben durch

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2m}p^2 + mg\bar{p} - mgA\bar{p}^2 = \left(\frac{1}{2m} - mgA\right)\bar{q}^2 + mg\bar{p}$$

- b) Für welchen Wert von A wird \bar{q} eine zyklische Koordinate in $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$? Skizzieren Sie für diesen Fall das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_{\bar{H}}(\bar{q}, \bar{p})$ und einige repräsentative Trajektorien im Phasenraum der neuen Koordinaten \bar{q} und \bar{p} .

Lösung:

Im Fall $A = \frac{1}{2m^2g}$ wird \bar{q} eine zyklische Koordinate. In diesem Fall ist das Hamilton'sche Vektorfeld gegeben durch

$$\mathbf{v}_{\bar{H}}(\bar{q}, \bar{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} \\ -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Trajektorien sind Geraden im Phasenraum.

- c) Lösen Sie für $A = 1/(2m^2g)$ die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für \bar{q} und \bar{p} und transformieren Sie zurück um die alten Koordinaten $q(q_0, p_0, t)$ und $p(q_0, p_0, t)$ als Funktion der Zeit und der Anfangsbedingungen $q_0 = q(0)$ und $p_0 = p(0)$ zu finden.

Lösung:

Es gilt

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} = 0 \rightarrow \bar{p} = \bar{p}_0 = \text{const}$$

und

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = mg \rightarrow \bar{q} = mgt + \bar{q}_0.$$

Daraus folgt durch Rücktransformation

$$p = -mgt + \bar{q}_0 = -mgt + p_0$$

und

$$q = \bar{p}_0 - \frac{p^2}{2m^2g} = q_0 + \frac{p_0^2}{2m^2g} - \frac{(-mgt + p_0)^2}{2m^2g} = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0}{m}t + q_0$$

3. Hamilton-Jacobi Gleichung

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in zwei Dimensionen beschrieben durch

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mgy.$$

- a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$?

Lösung:

Die Hamilton-Jacobi Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

- b) Lösen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung mittels Separationsansatz. Wie lauten Ihre beiden Separationskonstanten α_1, α_2 ?

Lösung:

Mithilfe des Separationsansatzes

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_x(x, \alpha_1, \alpha_2) + W_y(y, \alpha_1, \alpha_2) - Et$$

ergibt sich

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_y}{\partial y} \right)^2 + mgy = E$$

Diese lässt sich separieren mittels

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = \alpha_1$$

und

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W_y}{\partial y} \right)^2 + mgy = \alpha_2.$$

Wobei dann für die Energie

$$E = \frac{\alpha_1^2}{2m} + \alpha_2$$

gilt. Integration ergibt

$$W_x = \alpha_1 x$$

und

$$W_y = \sqrt{2m} \int \sqrt{\alpha_2 - mgy} dy = -\frac{2\sqrt{2m}}{3mg} (\alpha_2 - mgy)^{\frac{3}{2}}$$

daher ist die Lösung

$$S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t) = \alpha_1 x - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg} (\alpha_2 - mgy)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha_1^2}{2m} t - \alpha_2 t$$

- c) Verwenden Sie die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung um die Koordinaten $x(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ und $y(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ als Funktion der Zeit und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ zu bestimmen.

Lösung:

Es gilt

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = x - \frac{\alpha_1}{m} t$$

und

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\sqrt{2m}}{mg} (\alpha_2 - mgy)^{\frac{1}{2}} - t$$

durch Auflösen nach x und y folgt

$$x(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{m} t$$

und

$$y(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t) = \frac{\alpha_2}{mg} - \frac{g}{2} (t + \beta_2)^2$$

Die 4 Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ legen die Bewegung eindeutig fest. In diesem Sinne entsprechen sie den 4 Anfangsbedingungen $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$.

4. Wirkungs-Winkelkoordinaten

Betrachten Sie ein Teilchen mit Koordinate $q \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ im Box-Potential mit Abmessung d und unendlich hohen Wänden

$$V(q) = \begin{cases} 0 & |q| \leq \frac{d}{2} \\ \infty & |q| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q, p)$ und einige repräsentative Trajektorien im Phasenraum.

Lösung:

Die Hamiltonfunktion im Bereich $q \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$ ist gegeben durch

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}.$$

Das Hamilton'sche Vektorfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_H(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq$$

indem Sie über einen geschlossenen Orbit integrieren.

Lösung:

Das Integral ergibt sich zu

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sqrt{2mE} dq = \frac{d}{\pi} \sqrt{2mE}$$

- c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(I)$ als Funktion der Wirkungsvariable I . Berechnen Sie daraus die Periodendauer T eines Umlaufes.

Lösung:

Die Hamiltonfunktion ist

$$H(I) = E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi I}{d} \right)^2.$$

Die Kreisfrequenz der Bewegung ist damit gegeben durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{I}{m} \left(\frac{\pi}{d} \right)^2 = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{2E}{m}} \rightarrow T = d \sqrt{\frac{2m}{E}}.$$

Das Teilchen bewegt sich zwischen den Wänden mit Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Damit ergibt das Resultat

$$T = \frac{2d}{v_0}$$

welches bereits im 1. Tutorium (Beispiel 2) gefunden wurde.

- d) Berechnen Sie die zugehörige Winkelvariable $\theta(t)$ als Funktion der Zeit. Um welchen Wert erhöht sich die Winkelvariable θ bei jedem Umlauf?

Lösung:

Für die zugehörige Winkelvariable gilt

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\partial H}{\partial I} \rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0.$$

Bei jedem Umlauf erhöht sich der Wert um 2π .

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3c/4ab/4cd