6. Tutorium Analytische Mechanik VU, 27.01.2020

1. **Harmonisches Zweikörperproblem**

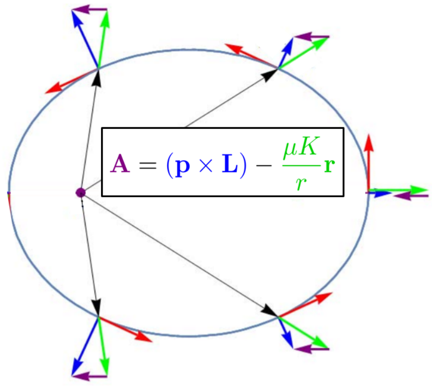
   Betrachten Sie zwei wechselwirkende Teilchen der Masse m_1 und m_2 in einer Dimension deren Hamiltonfunktion gegeben ist durch

   $$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + k(q_1 - q_2)^2.$$

   a) Wie lautet die Hamiltonfunktion in den Schwerpunktskoordinaten (q, p, R, P)? Welche der Variablen wird zyklisch?

   b) Angenommen beide Teilchen befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung mit dem Anfangsimpuls $p_1(0) = 0$ und $p_2(0) = p_c$. Berechnen Sie die Position beider Teilchen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ als Funktion der Zeit.

2. **Kepler-Problem in der Ebene**



   Betrachten Sie das reduzierte Einteilchenproblem mit reduzierter Masse μ im Potential $V = -K/r$. Die Bewegungsebene sei als x-y-Ebene gewählt, so dass die Hamiltonfunktion gegeben ist durch

   $$H = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{p_y^2}{2\mu} - \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

   Der Drehimpuls zeigt in z-Richtung $L_z = xp_y - p_x y$ und der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der x-y-Ebene mit Komponenten

   $$\mathbf{A} = (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} L_z p_y - \frac{\mu K}{r} x \\ -L_z p_x - \frac{\mu K}{r} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Zeigen Sie zunächst nur für die x-Komponente A_x mithilfe der Poissonklammer, dass es sich um eine Erhaltungsgröße handelt.

   b) Sie wissen aus dem 2. Tutorium, dass L_z eine Erhaltungsgröße ist. Zeigen Sie, dass $\{L_z, A_x\} = A_y$ gilt und beweisen Sie damit, dass auch die y-Komponente A_y eine Erhaltungsgröße ist.

3. **Keplerbahn**

Betrachten Sie erneut das Einteilchenproblem aus Beispiel 2, wobei die x-Achse so gewählt wird, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor in x-Richtung liegt $\mathbf{A} = A\,\mathbf{e}_x$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ in Polarkoordinaten (r, φ) und zeigen Sie daraus die Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{d}{1 + e\cos(\varphi)}$$

für die Lösung des Kepler-Problems. Bestimmen Sie den Parameter d und die (numerische) Exzentrizität e in Abhängigkeit von A und L.

b) Skizzieren Sie die Bahn in den Fällen $0 < e < 1$ und $e > 1$.

4. **Hamilton-Jacobi Gleichung**

Ein Teilchen mit reduzierter Masse μ bewege sich in drei Dimensionen im Potential

$$V(r) = -\frac{K}{r} + \frac{C}{r^2}.$$

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung in Kugelkoordinaten?

b) Separieren Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung mittels

$$S(r, \theta, \varphi, \boldsymbol{\alpha}, t) = W_r(r, \boldsymbol{\alpha}) + W_\theta(\theta, \boldsymbol{\alpha}) + W_\varphi(\varphi, \boldsymbol{\alpha}) - Et$$

und geben Sie die drei getrennten Differentialgleichungen für $W_r(r, \boldsymbol{\alpha})$, $W_\theta(\theta, \boldsymbol{\alpha})$ und $W_\varphi(\varphi, \boldsymbol{\alpha})$ an. Wie unterscheiden sich diese vom Kepler-Problem?

c) Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion ausgedrückt durch die Wirkungsvariablen I_r, I_θ, I_φ gegeben ist durch

$$H(I_r, I_\theta, I_\varphi) = -\frac{K^2\mu}{2\left(I_r + \sqrt{(I_\theta + I_\varphi)^2 + 2\mu C}\right)^2}$$

Hinweis: Sie können alle Ergebnisse (Integrale) aus der Vorlesung verwenden.

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2a/2b/3/4ab/4c