1. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 30.11.2021

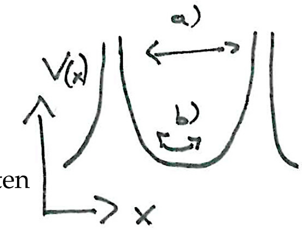
1

1.1 KOMPLIZIERTES POTENTIAL

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \frac{k}{2a^2} \tan^2(ax), \tag{1.1}$$

und ein Teilchen am Anfangsort $x(t=0)=0$ mit Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(t=0)=v_0$. Wir sind an der Schwingungsperiode T interessiert, also wann das erste Mal wieder $x(t=T)=0$ und $\dot{x}(t=T)=v_0$ gilt. Wir sehen uns dazu die 2 Grenzfälle von sehr kleinen (genauer $v_0 \ll \sqrt{k/m}/a$) und sehr großen Anfangsgeschwindigkeiten an. Einmal exploriert das Teilchen nur ein kleines Stück des Potentials, und einmal den vollen Bereich.



a) Betrachten wir zuerst den (einfacheren) Fall großer Anfangsgeschwindigkeiten v_0. Plotten Sie das Potential, und lesen Sie die Umkehrpunkte für den Limes $v_0 \to \infty$ ab. Berechnen Sie dafür (mit $s = vt$) die Schwingungsperiode T_1 im Limes $v_0 \to \infty$.

b) Für kleine Anfangsgeschwindigkeiten v_0 berechnen Sie die lokale Taylor-Approximation des Potentials an $x=0$ bis zur Ordnung x^2. Über die Energieerhaltung bestimmen Sie nun den Umkehrpunkt x_{max} und auch die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$.

c) Über $dt = 1/v\,dx$ kann gezeigt werden, dass folgende „inverse“ Beziehung für $t(x)$ gilt

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(v_0, x')} dx'.$$

Berechnen Sie damit die Zeit, die das Teilchen von $x=0$ bis $x=x_{max}$ braucht, und darüber die Schwingungsperiode T_2 für v aus b).

HINWEISE:

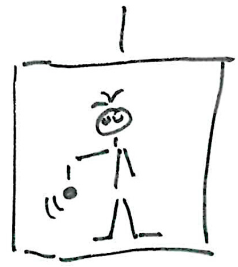
$$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}} dx = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{b}x}{\sqrt{a-bx^2}}\right)}{\sqrt{b}}$$

$$\tan^{-1}(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

1.2 EIN STEIN

Sie stehen im TU-Lift und finden einen Stein in ihrer Tasche.



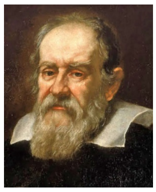
a) Wann schlägt der Stein am Boden auf, wenn Sie den Stein aus 1 m Höhe fallen lassen?

b) Sie wiederholen das Experiment, während der Aufzug gleichförmig gerade nach oben beschleunigt. Nun schlägt der Stein schon nach 0.43 s am Boden auf. Wie schnell beschleunigt also der TU-Aufzug?

1.3 GALILEI-TRANSFORMATION

Eine allgemeine Galilei-Transformation lautet

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\,(\mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t - \mathbf{b}_0)\,, \tag{1.2}$$
$$\tilde{t} = t - t_0, \tag{1.3}$$



Galileo Galilei
(1564 - 1642)

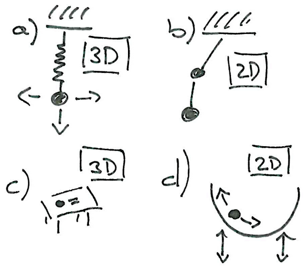
mit einer 3×3 Drehmatrix $\mathbf{R}$, Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$, Verschiebung $\mathbf{b}_0$ und einer Verschiebung t_0 des Zeitnullpunktes.

a) Es sein zwei Galilei-Transformationen, $(\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{v}_0^{(1)}, \mathbf{b}_0^{(1)}, t_0^{(1)})$ sowie $(\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{v}_0^{(2)}, \mathbf{b}_0^{(2)}, t_0^{(2)})$, gegeben. Berechnen Sie diejenige Galilei-Transformation, die sich ergibt, wenn beide hintereinander ausgeführt werden, zuerst (1), dann (2). Das heißt, Sie schreiben eine dritte Galilei-Transformation $(\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{v}_0^{(3)}, \mathbf{b}_0^{(3)}, t_0^{(3)})$ an, und drücken $\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{v}_0^{(3)}, \mathbf{b}_0^{(3)}, t_0^{(3)}$ durch die ersten beiden Transformationen aus.

b) Nehmen wir nun an, die dritte Galilei-Transformation sei die identische Transformation, also $(\mathbf{R}^{(3)}, \mathbf{v}_0^{(3)}, \mathbf{b}_0^{(3)}, t_0^{(3)}) = (\mathbf{I}, 0, 0, 0)$. In diesem Fall war die Transformation (2) die Inverse zu (1). Berechnen Sie damit die Inverse einer Galilei-Transformation.

1.4 ZWANGSBEDINUNGEN

Beantworten Sie für die verschiedenen Systeme folgende fragen: Handelt es sich um holonome Zwangsbedingungen? Sind die Zwangsbedingungen skleronom oder rheonom? Wie viele Freiheitsgrade hat das System?



a) Ein Teilchen an einer Feder in 3D

b) Das Doppelpendel in 2D

c) Ein Teilchen auf einem schiefen Tisch

d) Ein Teilchen in einem zeitabhängigen harmonischen Potential

$$V(x, t) = x^2 + h(t)$$

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
1.1 a-b / 1.1 c / 1.2 / 1.3 a / 1.3 b / 1.4