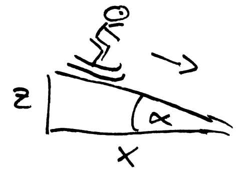
2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 7.12.2021

2

2.1 SKIFAHREN



Katharina Liensberger (instagram)

HINWEIS:
Die Fallbeschleunigung am Mond beträgt

$$g'_{\text{Mond}} = 1{,}622\,\mathrm{ms^{-2}}.$$

Eine Skifahrerin der Masse m rutscht unter Einfluss der Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$ reibungsfrei den Hang mit der Steigung α hinab,

$$x = -\frac{z}{\tan\alpha}. \tag{2.1}$$

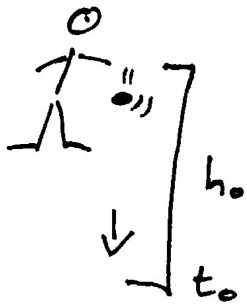
a) Wie lautet die Zwangsbedingung $f(x,z) = 0$ an die kartesischen Koordinaten (x,z)? Handelt es sich dabei um eine holonome Zwangsbedingung? Ist die Zwangsbedingung skleronom oder rheonom? Finden Sie eine geeignete generalisierte Koordinate $\eta \in \mathbb{R}$ für das System, und Ausdrücke $x(\eta)$ und $z(\eta)$, sodass die Zwangsbedingung für alle η erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie den (normalisierten $\mathcal{N}$) Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta = 1/\mathcal{N}\,\partial\mathbf{r}/\partial\eta$. Wohin zeigt die Zwangskraft $\mathbf{F}^R$?

c) Schreiben Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit einer Zwangskraft $\mathbf{F}^R$ an und projizieren Sie diese Gleichung auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\eta$. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung der generalisierten Koordinate $\ddot{\eta} = f(\eta,\dot{\eta})$.

d) Vergleichen Sie die Bewegungsgleichung mit der eines freien Teilchens und modifizierter Erdbeschleunigung g'. Wie groß muss der Winkel α sein, dass die Skifahrerin so langsam bergab gleitet, wie sie auf dem Mond frei fallen würde?

2.2 EIN STEIN UND LAGRANGE



Wieder lassen wir einen Stein fallen. Wir wissen nun schon, dass er die Höhe h_0 in einer Zeit von $t_0 = \sqrt{2h_0/g}$ hinab fällt, also $z(t_0) = -h_0$. Wir machen nun den Ansatz

$$z(t) = at + bt^2 \tag{2.2}$$

(also $z(t=0) = 0$) mit zu bestimmenden, reellen Konstanten a, b.

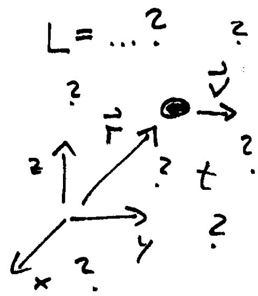
a) Finden Sie zuerst eine Relation zwischen a und b und drücken Sie b durch a aus.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{t_0} L\,dt, \quad L = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz.$$

c) Finden Sie das Minimum dieses Integrals bezüglich des Parameters a. Zeigen Sie, dass Sie dadurch die bekannte Lösung $z(t) = -g/2\,t^2$ erhalten.

2.3 Lagrangefunktion eines freien Teilchens



In der Lagrangefunktion eines freien Teilchens spiegelt sich die Homogenität des Raumes und der Zeit wieder, ebenso wie die Isotropie des Raumes.

a) Argumentieren Sie damit, welche der folgenden Terme in der Lagrangefunktion eines freien Teilchens erlaubt sind, und welche Sie über die Homogenität des Raumes und der Zeit sowie der Isotropie des Raumes ausschließen können: $L \propto \ldots$?

$$\mathbf{x}, \quad x^2, \quad \mathbf{v}, \quad v^2, \quad v^3, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}, \quad v^2 t. \tag{2.3}$$

b) Führen Sie für eine Funktion $L(v) = mv^2/2$ mit einer Konstanten $m \in \mathbb{R}^+$ eine Galilei-Transformation

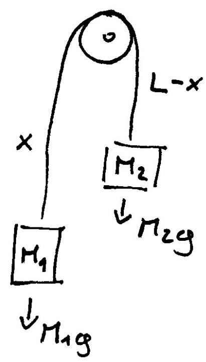
$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{v}_0 t, \qquad \tilde{t} = t \tag{2.4}$$

für konstante Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ durch. Zeigen Sie, dass $\tilde{L}(v)$ geschrieben werden kann als

$$\tilde{L}(v) = L(v) + \frac{d}{dt} F \tag{2.5}$$

und bestimmen Sie F.

2.4 Fallmaschine nach Atwood



Zwei Massestücke (M_1 und M_2) sind über eine drehbare Rolle mit einer Schnur verbunden. Die Rolle und die Schnur werden als masse- und reibungslos betrachtet.

a) Finden Sie eine geeignete generalisierte Koordinate für das System, und stellen Sie eine Formel für die potentielle Energie V sowie die kinetische Energie T des Systems auf.

b) Bestimmen Sie mittels der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung des Systems. Können Sie M_1 und M_2 so wählen, dass die Bewegung dem freien Fall auf dem Mond gleicht? Diskutieren Sie (in einem Satz) die historische Bedeutung der atwoodsche Fallmaschine.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
2.1 a-b / 2.1 c-d / 2.2 / 2.3 a / 2.3 b / 2.4