5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 18.1.2022

5

5.1 IN ERINNERUNGEN PENDELN

Wir betrachten ein Pendel in der x, y-Ebene, mit der Gravitationskraft $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{e}}_y$. Dafür bestimmen wir die Bewegungsgleichungen im Newton-, Lagrange-, und Hamilton Formalismus.

a) Wie lautet die Zwangsbedingung $f(x, y) = 0$ an die kartesischen Koordinaten (x, y)? Finden Sie eine geeignete generalisierte Koordinate ϕ für das System. Bestimmen Sie den (normalisierten $\mathcal{N}$) Einheitsvektor $\mathbf{e}_\phi = 1/\mathcal{N}\, \partial\mathbf{r}/\partial\phi$. Schreiben Sie die Newton'sche Bewegungsgleichung mit einer Zwangskraft $\mathbf{F}^R$ an und projizieren Sie diese Gleichung auf den Einheitsvektor $\mathbf{e}_\phi$. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung der generalisierten Koordinate $\ddot{\phi} = f(\phi, \dot{\phi})$.

b) Schreiben Sie die Lagrangefunktion L für das Pendel an. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

c) Führen Sie eine Legendretransformation durch, bestimmen Sie die Hamilton-Funktion, und bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichung.

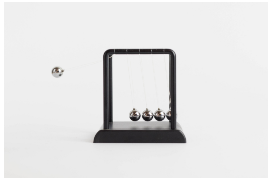

Photo by Marco Verch on flickr

5.2 SPASS MIT DREHIMPULSEN

Der Drehimpuls ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, oder $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$. Weiters sei $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

HINWEIS:

$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

a) Zeigen Sie $\{L_x, L_y\} = L_z$. Benutzen Sie hierzu die Definition der Poisson Klammern über Ableitungen.

b) Zeigen Sie $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$. Benutzen Sie nun die fundamentalen Poisson Klammern.

c) Berechnen Sie $\{L^2, L_z\}$.

Photo by Stephanie Guarini on unsplash

5.3 GRAVITATION IN 3D MIT POISSON

Die Hamiltonfunktion dieses Systems in kartesischen und in Kugelkoordinaten lautet:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - m\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{5.1}$$

$$H(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2(\theta)}\right) - m\frac{K}{r} \tag{5.2}$$

Zeigen Sie explizit, dass sowohl die z-Komponente des Drehimpulses L_z als auch L^2 erhalten sind, sprich $\{L_z, H\}$=0 und $\{L^2, H\}$=0.

HINWEIS:

$$\{p_i, \frac{1}{r}\} = \frac{r_i}{r^3}$$

a) für kartesische Koordinaten

b) für Kugelkoordinaten mit

$$L_z = mr^2\sin^2(\theta)\dot{\phi} = p_\phi, \tag{5.3}$$

$$L^2 = p_\theta^2 + p_\phi^2/\sin^2(\theta). \tag{5.4}$$

Photo by NASA on unsplash

5.4 POISSON UND EIN STEIN

Auch über Poisson Klammern können wir die Bewegung unseres Steines herausfinden.

$$H(z, p) = \frac{p^2}{2m} + mgz. \tag{5.5}$$

Formal kann man die Lösung von

$$\begin{pmatrix}\dot{z}\\ \dot{p}\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}z\\ p\end{pmatrix}, H\right\}$$

als

$$\begin{pmatrix}z(t)\\ p(t)\end{pmatrix} = \exp\left(t\{\bullet, H(z_0, p_0)\}\right)\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

schreiben. Die Exponentialfunktion ist als Taylorreihe auszuwerten, also

$$\exp\left(t\{\bullet, H\}\right)\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix} = \left(1 + t\{\bullet, H\} + \frac{t^2}{2!}\{\bullet, H\}\{\bullet, H\} + \dots\right)\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Die Rechnung ist wild – schnallen Sie sich an, und folgen den Anweisungen der Besatzung, es sind dafür nur 4 Zeilen.

Für den Punkt ($\bullet$) setzen Sie immer den Term "rechts davon" ein, also z.B.

$$\{\bullet, H\}\{\bullet, H\}\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix} = \{\bullet, H\}\left\{\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix}, H\right\} = \left\{\left\{\begin{pmatrix}z_0\\ p_0\end{pmatrix}, H\right\}, H\right\}. \tag{5.8}$$

a) Berechnen Sie die Poisson Klammern $\{z, H\}$ und $\{p, H\}$.

b) Bestimmen Sie nun die Lösungen $z(t)$ und $p(t)$!

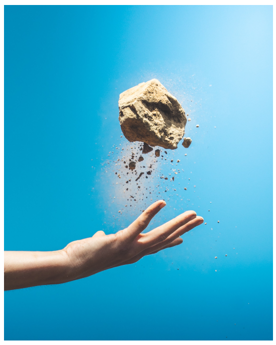

Photo by Miguel Bruna on unsplash

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
5.1 a / 5.1 b c / 5.2 / 5.3 a / 5.3 b / 5.4