6. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 11.01.2022

6

6.1 EIN STEIN MIT KANONISCHEN TRANSFORMATIONEN

a) Eine Transformation ist kanonisch, falls die fundamentalen Poisson Klammern oder die Hamilton'schen Bewegungsgleichung unverändert bleiben oder eine erzeugende Funktion existiert. (Diese Bedingungen sind äquivalent)

Wir berechnen die Poisson Klammer der transformierten Variablen:

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \frac{a}{2m}\underbrace{\{p, p^2\}}_{=0} + amg\underbrace{\{p, q\}}_{=-1} \overset{!}{=} 1 \tag{6.1}$$

Daraus folgt sofort, dass für $a = -1/mg$ die Transformation kanonisch ist.

b) Es werden p und $\bar{p}$ durch die Variablen $(q, \bar{q})$ ausgedrückt und anschließend die Integrale berechnet

$$p(q, \bar{q}) = -mg\bar{q} = \frac{\partial F_1(q, \bar{q})}{\partial q} \tag{6.2}$$

$$\Rightarrow F_1(q, \bar{q}) = -mg\bar{q}q + C(\bar{q}). \tag{6.3}$$

Hier verwenden wir $p = -mg\bar{q}$ und erhalten

$$\bar{p}(q, \bar{q}) = \frac{\bar{q}^2 g^2 m}{2} + mgq = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} \tag{6.4}$$

$$\Rightarrow F_1(q, \bar{q}) = -\frac{\bar{q}^3 g^2 m}{6} - mg\bar{q} + C(q). \tag{6.5}$$

Das wird erfüllt durch

$$F_1(q, \bar{q}) = -\frac{\bar{q}^3 g^2 m}{6} - mgq\bar{q}. \tag{6.6}$$

c) Zunächst benötigen wir $\bar{q}(q, \bar{p})$:

$$\bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} = mgq + \frac{1}{2}mg\bar{q}^2 \tag{6.7}$$

$$\bar{q}^2 = \frac{2}{mg}(\bar{p} - mgq) \tag{6.8}$$

$$\bar{q}(q, \bar{p}) = \sqrt{\frac{2}{mg^2}(\bar{p} - mgq)} \tag{6.9}$$

Hier wählen wir die positive Wurzel.

$$
\begin{aligned}
F_2(q,\bar{p}) =& F_1(q,\bar{q}(q,\bar{p})) + \bar{p}\bar{q}(q,\bar{p}) \qquad (6.10)\\
=& -\frac{1}{6}mg^2\left(\frac{2}{mg^2}(\bar{p}-mgq)\right)^{3/2}\\
& - mgq\left(\frac{2}{mg^2}(\bar{p}-mgq)\right)^{1/2} + \bar{p}\left(\frac{2}{mg^2}(\bar{p}-mgq)\right)^{1/2}\\
=& -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{mg^2}}(\bar{p}-mgq)^{3/2} + \sqrt{\frac{2}{mg^2}}(\bar{p}-mgq)\sqrt{\bar{p}-mgq}\\
=& \frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}(\bar{p}-mgq)^{3/2} \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

6.2 EIN STEIN MIT KANONISCHEN TRANSFORMATIONEN II

Gegeben ist die erzeugende Funktion

$$F_2(q,\bar{p}) = \frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(\bar{p}-mgq)^{3/2}\,. \qquad (6.12)$$

a) Mit den partiellen Ableitungen von F_2 werden p und $\bar{q}$ und berechnet.

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial F_2}{\partial q}\\
&= \frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\frac{3}{2}(\bar{p}-mgq)^{\frac{1}{2}}(-mg)\\
&= -\sqrt{2m(\bar{p}-mgq)} \qquad (6.13)\\
\bar{q} &= \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}}\\
&= \frac{1}{mg}\sqrt{2m(\bar{p}-mgq)} \qquad (6.14)
\end{aligned}
$$

Berechne mit Gleichung (6.13) nun $\bar{p}$:

$$p^2 = 2m(\bar{p}-mgq) \qquad (6.15)$$

$$\Longrightarrow \bar{p} = \frac{p^2}{2m} + mgq \qquad (6.16)$$

Für $\bar{q}$, kombinieren wir Gleichung (6.13) mit Gleichung (6.14),

$$\bar{q} = -\frac{p}{mg}. \qquad (6.17)$$

b) Nun soll die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \qquad (6.18)$$

transformiert werden. Es gilt:

$$\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = H(q(\bar{q},\bar{p}),p(\bar{q},\bar{p})) + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (6.19)$$

Die erzeugende Funktion F_2 ist nicht explizit zeitabhängig, $\partial F_2/\partial t$ ist daher null. Berechne zuerst q und p in Abhängigkeit von $\bar{q}$ und $\bar{p}$:

$$\bar{q} = -\frac{p}{mg} \tag{6.20}$$

$$\implies p = -\bar{q}mg \tag{6.21}$$

Um p zu berechnen setze Gleichung (6.21) in Gleichung (6.16) ein:

$$\bar{p} = \frac{(-\bar{q}mg)^2}{2m} + mgq \tag{6.22}$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{q}^2 mg^2}{2} + mgq \tag{6.23}$$

$$\implies q = \frac{\bar{p}}{mg} - \frac{\bar{q}^2 g}{2} \tag{6.24}$$

Für die transformierte Hamilton-Funktion setze Gleichung (6.24) und Gleichung (6.21) in Gleichung (6.18) ein:

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{\bar{q}^2 mg^2}{2} + \bar{p} - \frac{\bar{q}^2 mg^2}{2} \tag{6.25}$$

$$= \bar{p} \tag{6.26}$$

In diesen neuen Koordinaten ist $\bar{q}$ also zyklisch, $\bar{p}$ ist eine Erhaltungsgröße, die Gesamtenergie. Löse die Bewegungsgleichungen, zuerst für $\bar{q}$:

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}} = 1 \tag{6.27}$$

$$\bar{q} = t + \beta \tag{6.28}$$

Für $\bar{p}$:

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}} = 0 \tag{6.29}$$

$$\bar{p} = \alpha \tag{6.30}$$

Mit α und β als Konstanten.

c) Transformiere zurück in die Koordianten (q, p). Für q ergibt sich:

$$q = \frac{\bar{p}}{mg} - \frac{\bar{q}^2 g}{2} \tag{6.31}$$

$$= -\frac{g}{2}t^2 - g\beta t - \frac{\beta^2 g}{2} + \frac{\alpha}{mg}. \tag{6.32}$$

Für p:

$$p = -\bar{q}mg \tag{6.33}$$

$$= -mg(t + \beta). \tag{6.34}$$

Führe die Anfangsbedingungen $q(t=0) = q_0$ und $p(t=0) = p_0$ ein:

$$p_0 = -mg\beta \tag{6.35}$$

$$\implies \beta = -\frac{p_0}{mg} \tag{6.36}$$

$$q_0 = -\frac{p_0^2}{2m^2 g} + \frac{\alpha}{mg} \tag{6.37}$$

$$\implies \alpha = mgq_0 + \frac{p_0^2}{2m^2} \tag{6.38}$$

Damit ergibt sich die Lösung angeschrieben in (q,p)-Koordinaten:

$$q(t) = -\frac{g}{2}t^2 - \frac{p_0}{m}t + q_0 \tag{6.39}$$

$$p(t) = p_0 - mgt \tag{6.40}$$

6.3 EIN STEIN MIT HAMILTON JACOBI

a) Hamilton-Jacobi Formalismus:

- Im ersten Schritt konstruieren wir die Hamilton Funktion $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$.
- Jetzt ersetzen wir in der Hamilton Funktion die Impulse durch Ableitungen der Hamiltonschen Prinzipalfunktion (Erzeugende) $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$:
$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial \mathbf{q}}. \tag{6.41}$$
- Mithilfe der ersten zwei Unterpunkten kann man die Hamilton-Jacobi Gleichung aufschreiben und Lösen.
- Die Aufgabe liegt jetzt darin diese Gleichung zu Lösen.
Ein wichtiger Spezialfall sind konservative Systeme (i.e. H zeitunabhängig): hier ist die Erzeugende S additiv trennbar in der Zeit Koordinate (siehe unten). Im Allgemeinen kann damit S geschrieben werden als:
$$S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) = W(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha}) - Et. \tag{6.42}$$
Für eine detailliertere Erklärung siehe Skript: Kapitel 7.3.

b) Wir folgen den in *a)* beschriebenen Schritten, ersetzen zunächst die Impulse durch Ableitungen der Hamiltonschen Prinzipalfunktion und schreiben so die Hamilton-Jacobi-Gleichung an:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right) + mgz = -\frac{\partial S}{\partial t} \tag{6.43}$$

Die Gleichung lässt sich über den gegebenen Separationsansatz aufspalten:

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2\right)+mgz=E \tag{6.44}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2+2m^2gz=2mE \tag{6.45}$$

Da der zweite Term nur von y und der dritte nur von z abhängen, müssen diese jeweils separat gleich einer Konstante α_1^2 bzw. α_2^2 sein:

$$\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 =: \alpha_1^2 \Rightarrow W_x=\alpha_1 x+\gamma_1 \tag{6.46}$$

$$\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 =: \alpha_2^2 \Rightarrow W_y=\alpha_2 y+\gamma_2 \tag{6.47}$$

c) Auch der z-abhängige Teil muss für sich genommen eine Konstante α_3^2 ergeben:

$$\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2+2m^2gz =: \alpha_3^2 \tag{6.48}$$

und für die Energie gilt:

$$2mE=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \tag{6.49}$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2m}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right) \tag{6.50}$$

Aus Gleichung (6.48) folgt:

$$\frac{\partial W_z}{\partial z}=\sqrt{\alpha_3^2-2m^2gz} \tag{6.51}$$

$$\Rightarrow W_z=\int\sqrt{\alpha_3^2-2m^2gz}\,dz \tag{6.52}$$

$$=\left|\begin{array}{c}\zeta:=\alpha_3^2-2m^2gz\\ \frac{d\zeta}{dz}=-2m^2g\\ dz=-\frac{1}{2m^2g}d\zeta\end{array}\right| \tag{6.53}$$

$$=-\frac{1}{2m^2g}\int\sqrt{\zeta}\,d\zeta \tag{6.54}$$

$$=-\frac{1}{3m^2g}\zeta^{3/2}+\gamma_3 \tag{6.55}$$

$$=-\frac{1}{3m^2g}\left(\alpha_3^2-2m^2gz\right)^{3/2}+\gamma_3 \tag{6.56}$$

Wir setzen die Integrationskonstanten in der Prinzipalfunktion 0 ($\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0$) und erhalten so für die Prinzipalfunktion:

$$S=\alpha_1x+\alpha_2y-\frac{1}{3m^2g}\left(\alpha_3^2-2m^2gz\right)^{3/2}-Et \tag{6.57}$$

$$=\alpha_1x+\alpha_2y-\frac{1}{3m^2g}\left(\alpha_3^2-2m^2gz\right)^{3/2}-\frac{1}{2m}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)t \tag{6.58}$$

d) Wir erhalten für die Ableitungen β_i:

$$\beta_1 = x - \frac{\alpha_1 t}{m} \tag{6.59}$$

$$\beta_2 = y - \frac{\alpha_2 t}{m} \tag{6.60}$$

$$\beta_3 = -\frac{\alpha_3}{m^2 g}\sqrt{\alpha_3^2 - 2m^2 g z} - \frac{\alpha_3 t}{m} \tag{6.61}$$

Diese drei Gleichungen stellen wir jeweils nach x, y bzw. z um und erhalten so:

$$x = \frac{\alpha_1}{m} t + \beta_1 \tag{6.62}$$

$$y = \frac{\alpha_2}{m} t + \beta_2 \tag{6.63}$$

$$z = -\frac{1}{2m^2 g}\left(\frac{m^4 g^2}{\alpha_3^2}\left(\beta_3 + \frac{\alpha_3 t}{m}\right)^2 - \alpha_3^2\right) \tag{6.64}$$

$$= -\frac{g t^2}{2} - \frac{m g \beta_3}{\alpha_3} t + \left(\frac{\alpha_3^2}{2m^2 g} - \frac{m^2 g \beta_3^2}{2\alpha_1^2}\right) \tag{6.65}$$