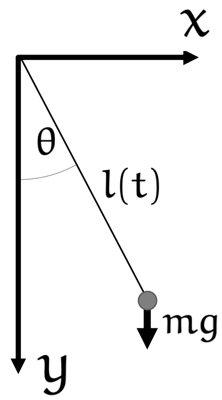
1. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 06.12.2022

1

1.1 LORENTZ'S PENDEL



Wir betrachten ein magisches, masseloses Pendel dessen Länge $l = l(t)$ sich mit der Zeit ändert. Wir betrachten im Folgenden verschiedene Wege, um die Bewegungsgleichungen dieses Pendels

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin(\theta) = 0.$$

abzuleiten.

a) Betrachten Sie dazu erst das um den Aufhängepunkt wirkende Drehmoment $\mathbf{M}$ als zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{I}$ um diesen Punkt im Rahmen einer Gleichung ($\mathbf{M} = \dot{\mathbf{I}}$).

b) Alternativ dazu stellen Sie nun die Lagrangefunktion $L = T - V$ des Systems auf und setzen Sie in die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1.1}$$

ein.

c) Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichung unter den Annahmen, dass $l(t) = l_0 + \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sowie dass nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auftreten (Kleinwinkelnäherung). An welche Differentialgleichung erinnert Sie ihr Ergebnis wenn $l_0 \gg \alpha t$?

Lösung:

- To derive the equation of motion (EOM) for the pendulum we use the fact that the torque M is equal to the time derivative of the angular momentum I

$$M = \dot{I} \tag{1.2}$$

The torque is given by

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.3}$$
$$= -l(t)mg\sin\theta(t) \tag{1.4}$$

whereas the angular momentum is given by

$$I = ml(t)^2\omega \tag{1.5}$$
$$= ml(t)^2\dot{\theta}(t) \tag{1.6}$$

The last ingredient necessary to find the EOM is the time derivative of the angular momentum

$$\dot{I} = 2ml\dot{l}\dot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} \tag{1.7}$$

Here we have omitted the time dependencies of l and θ for clarity. By plugging equations (1.3) and (1.7) in (1.2), we obtain the sought after EOM

$$\boxed{l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin(\theta) = 0} \tag{1.8}$$

- We can derive the same equation by using the Lagrangian describing the system. The Lagrangian is given by

$$L = T - V \tag{1.9}$$

where T is the kinetic energy and V the potential energy.

The coordinates of the pendulum are given by

$$x(t) = l(t)\sin\theta(t) \tag{1.10}$$
$$y(t) = -l(t)\cos\theta(t) \tag{1.11}$$

Their time derivatives are

$$\dot{x}(t) = \dot{l}(t)\sin\theta(t) + l(t)\dot{\theta}\cos\theta(t) \tag{1.12}$$
$$\dot{y}(t) = -\dot{l}(t)\cos\theta(t) + l\dot{\theta}\sin\theta(t). \tag{1.13}$$

We can now write the kinetic energy as

$$T = \frac{1}{2}m\left[\dot{l}^2(t) + l^2(t)\dot{\theta}^2(t)\right] \tag{1.14}$$

and the potential energy as

$$U = mgy(t) = -mgl(t)\cos\theta(t). \tag{1.15}$$

We can now plug in equation (1.9) in the Euler-Lagrange equation and obtain

$$0 = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) - m(-gl\sin\theta) \tag{1.16}$$
$$= m(l^2\ddot{\theta} + 2l\dot{l}\dot{\theta} + gl\sin\theta) \tag{1.17}$$

Thus we have derived the EOM for the pendulum

$$\boxed{l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0}. \tag{1.18}$$

- The first approximation to the equation we make is the small angle approximation. For that we expand the $\sin(\theta)$ function

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + ... \tag{1.19}$$

Thus, for small θ we rewrite eq. (1.18) as

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\theta = 0. \tag{1.20}$$

This equation can now be solved either analytically or numerically, depending on the time dependence of the length l(t).

We are also given an explicit form for the time dependence of l(t), i.e. the length of the pendulum

$$l(t) = l_0 + \alpha t \tag{1.21}$$

with $\alpha \in \mathbb{R}$.

By inserting eq.(1.21) into eq.(1.20), we obtain

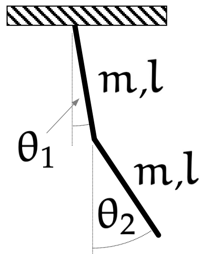
$$(l_0 + \alpha t)\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + g\theta = 0 \tag{1.22}$$

The last approximation we consider is $l_0 \gg \alpha t$: here by simple insertion we see that the our system becomes a simple, damped harmonic oscillator

$$l_0\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + g\theta = 0 \tag{1.23}$$

whose solutions are known. Note that the damping (or growth depending on the sign of α results from the slow change in length.

1.2 PHYSIKALISCHES DOPPELPENDEL IN 2D



Wir betrachten zwei identische homogene Stäbe (Linienmassendichte: m/l, Länge:l) in einer Doppelpendel Anordnung in der Ebene. Schwerkraft mit konstanter Erdbeschleunigung g wirke in -y Richtung.

a) Wie lautet die Lagrangefunktion $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ des Systems?
Lösung:
Die gesamte kinetische Energie des Doppelpendels ergibt sich durch die Summe der Energie aller infinitesimalen Linienelemente. Die Ortskoordinaten ergeben sich aus

$$\mathbf{r_1}(r) = r \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r_2}(r) = \ell \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{pmatrix},$$

die dazugehörigen Impulse zu

$$\begin{aligned} \mathbf{p_1}(r) &= \frac{mr\dot{\theta}_1}{\ell} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p_2}(r) &= \frac{m}{\ell}\left[\ell\theta_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \end{pmatrix} + r\theta_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ -\sin\theta_2 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Die kinetische Energie eines Linienelements des ersten Pendels ist damit

$$dT_1 = \frac{\mathbf{p_1}(r)^2}{2\frac{m}{\ell}} dr = \frac{mr^2\dot{\theta}_1^2}{2\ell} dr,$$

insgesamt also

$$T_1 = \int_{r=0}^{\ell} dT_1 = \frac{m\ell^2\dot{\theta}_1^2}{6}.$$

Für das zweite Pendel errechnen sich Linienelement und Gesamtenergie analog zu

$$dT_2 = \frac{\mathbf{p_2}(r)^2}{2\frac{m}{\ell}} d\mathbf{p_2} = \frac{m}{2\ell}\left[\ell^2\dot{\theta}_1^2 + r^2\dot{\theta}_2^2 + 2\ell r\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)\right] dr$$

und

$$T_2 = \int_{r=0}^{\ell} dT_2 = \frac{m\ell^2\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m\ell^2\dot{\theta}_2^2}{6} + \frac{m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2}{2}\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right).$$

Die potentielle Energie ist linear in y, deswegen genügt die Verwendung des Schwerpunkts zu

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{mg\ell}{2}\cos\theta_1 \\ V_2 &= mg\ell\cos\theta_1 + \frac{mg\ell}{2}\cos\theta_2 \end{aligned}$$

und damit die Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned} L = T - V &= m\ell^2\left[\frac{2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right)\right] - \\ &-mg\ell\left(\frac{3}{2}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right) \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen schreiben lässt als

$$L(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = ml^2\left(\frac{2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{3mgl}{4}\theta_1^2 - \frac{mgl}{4}\theta_2^2 \tag{1.24}$$

(entwickeln Sie Winkelfunktionen bis zur zweiten Ordnung in θ_1 und θ_2).

Lösung:

Die Taylorreihen für die Winkelfunktionen sind

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{und} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

Der erste Term vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) \approx \frac{1}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2,$$

da die quadratischen Terme in Sinus- und Cosinusprodukt zusammen mit dem Vorfaktor quartischer Ordnung sind. Es ist vernünftig, anzunehmen, dass bei kleinem θ auch ihre Ableitung $\dot{\theta}$ klein ist. Der potentielle Term wird zu

$$mg\ell\left(\frac{3}{2}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right) \approx mg\ell\left(\frac{3}{4}\theta_1^2 + \frac{1}{4}\theta_2^2\right),$$

da konstante Energieterme die Bewegungsgleichungen nicht verändern und damit vernachlässigbar sind.

c) Schreiben Sie für die Lagrangefunktion in b) die Euler-Lagrange-Gleichungen an.

Lösung:

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich aus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ zu

$$\begin{aligned} \theta_1 &: \quad \tfrac{4}{3}\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_2 + \tfrac{3}{2}\tfrac{g}{\ell}\theta_1 = 0, \\ \theta_2 &: \quad \tfrac{1}{2}\ddot{\theta}_1 + \tfrac{1}{3}\ddot{\theta}_2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{g}{\ell}\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des folgenden Ansatz

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \tag{1.25}$$

die Normalmoden (Frequenzen ω und Auslenkungen $\mathbf{A}$) des Systems.
Lösung:
Damit das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\frac{g}{\ell\omega^2} - \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\frac{g}{\ell\omega^2} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

einen nichttrivialen Kern hat, muss die Determinante verschwinden. Das führt zu zwei möglichen Normalmoden und Auslenkungsamplituden

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{9}{7 \pm 2\sqrt{7}}}\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp\frac{3}{1-2\sqrt{7}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e) Diskutieren und visualisieren Sie die Lösungen aus d).
Lösung:
Für Pendellänge $\ell = 1$ ergeben sich eine Lösung mit kleinerer Frequenz und gleicher Pendelauslenkungsrichtung

$$\omega_1 \approx 2.680\text{s}^{-1}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.700 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und eine Lösung höherer Frequenz mit gegengleicher Auslenkung

$$\omega_2 \approx 7.189\text{s}^{-1}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.477 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 1D BEWEGUNG IM EINSCHÜCHTERNDEN KRAFTFELD

a) Die Gesamtenergie E = T +V setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

Daraus ergibt sich

$$E = \frac{k}{2a^2}\left(\frac{1}{\cos^2(ax(t))} - 1\right) + \frac{mv(t)^2}{2}.$$

b) Mit den gegebenen Anfangsbedingungen lässt sich die Gesamtenergie zum Zeitpunkt $t = 0$ als rein kinetischer Term ausdrücken. Aufgrund der Energieerhaltung kann dieser Ausdruck nun mit der Gesamtenergie aus *a)* gleichgesetzt werden:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{k}{2a^2}\left(\frac{1}{\cos^2(ax(t))} - 1\right) + \frac{mv(t)^2}{2}.$$

Auflösen nach v liefert die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$ als Funktion von Anfangsgeschwindigkeit und Position

$$v(v_0, x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2}\left(\frac{1}{\cos^2(ax(t))} - 1\right)}.$$

Die Umkehrpunkte x_u sind genau jene Punkte, an denen die Gesamtenergie zur Gänze durch die potentielle Energie gegeben sind, d.h. die Geschwindigkeit verschwindet $v(v_0, x_u) = 0$. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen beim Wurzelziehen können aus dieser Bedingung die Umkehrpunkte zu

$$x_u(v_0) = \pm\frac{1}{a}\arctan\left(\sqrt{\frac{v_0^2 a^2 m}{k}}\right)$$

bestimmt werden.

c) Die Bewegungsgleichung für dieses eindimensionale System kann im Lagrangeformalismus durch einsetzen der Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2a^2}\left(\frac{1}{\cos^2(ax(t))} - 1\right)$$

in die Euler-Lagrange-Gleichung aufgestellt werden,

$$m\ddot{x} + \frac{k}{a}\frac{\tan(ax)}{\cos^2(ax)} = 0.$$

d) Ausgehend von $dt = \frac{1}{v}dx$ wird auf beiden Seiten integriert und man erhält unter Verwendung der Anfangsbedingungen

$$\int_{t(x_0)}^{t(x)} dt = \int_{x_0}^{x} dx\prime \frac{1}{v(v_0, x\prime)} \quad \rightarrow \quad t(x) = \int_0^x dx\prime \frac{1}{v(v_0, x\prime)}.$$

Mit dem Ausdruck für $v(v_0, x)$ und dem Hinweis für das Integral bekommt man

$$t(x) = \int_0^x dx\prime \frac{1}{v_0\sqrt{1 + \frac{k}{v_0^2 a^2 m} - \frac{k}{v_0^2 a^2 m}\frac{1}{\cos^2(ax\prime)}}}$$

$$t(x) = \frac{1}{a\sqrt{v_0^2 + \frac{k}{a^2 m}}}\arcsin\left(\sqrt{1 + \frac{k}{v_0^2 a^2 m}}\sin(ax)\right).$$

Die Periode T ist jene Zeit, in dem sich das Teilchen von x_u zu $-x_u$ und wieder zurück zu x_u bewegt. Aus Symmetriegründen lässt sie sich berechnen als

$$T = 4 \cdot t(x_u) = \frac{2\pi}{\sqrt{v_0^2 a^2 + \frac{k}{m}}}.$$

Hierbei wurde folgende trigonometrische Identität benutzt

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

e) Im Grenzfall kleiner Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 \ll 1$ kann der Wurzelausdruck in v_0 entwickelt werden. In erster Ordnung gilt die Näherung

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}},$$

die der Periode eines harmonsichen Oszillators gleicht. Lokal lassen sich die meisten Potentiale in erster Ordnung durch ein harmonisches Potential approximieren.

Zieht man aus der Wurzel den Faktor v_0^2 heraus, so lässt sich die Periode als

$$T = \frac{2\pi}{v_o a \sqrt{1 + \frac{k}{v_0^2 a^2 m}}}$$

schreiben. Für große Geschwindigkeiten $\frac{1}{v_0} \ll 1$ entwickelt man nun den Wurzelausdruck wieder und man erhält

$$T \approx \frac{2\pi}{v_0 a}.$$

Dies entspricht der Periode eines Teilchens, das konstant mit Geschwindigkeit v_0 zwischen zwei Wänden, die im Abstand $\frac{\pi}{a}$ stehen, hin und her reflektiert wird.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
1.1 ab / c / 1.2 ab / c / de / 1.3 ab / c / de