1. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 06.12.2022

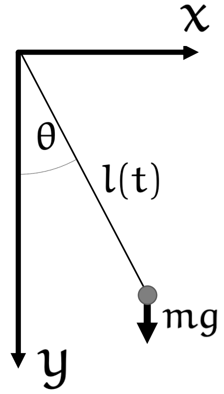
1

1.1 LORENTZ'S PENDEL

Wir betrachten ein magisches, masseloses Pendel dessen Länge $l = l(t)$ sich mit der Zeit ändert. Wir betrachten im Folgenden verschiedene Wege, um die Bewegungsgleichungen dieses Pendels

$$l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin(\theta) = 0.$$

abzuleiten.



a) Betrachten Sie dazu erst das um den Aufhängepunkt wirkende Drehmoment $\mathbf{M}$ als zeitliche Änderung des Drehimpulses $\mathbf{I}$ um diesen Punkt im Rahmen einer Gleichung ($\mathbf{M} = \dot{\mathbf{I}}$).

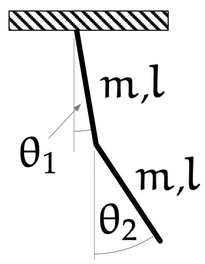
b) Alternativ dazu stellen Sie nun die Lagrangefunktion $L = T - V$ des Systems auf und setzen Sie in die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{1.1}$$

ein.

c) Vereinfachen Sie die Bewegungsgleichung unter den Annahmen, dass $l(t) = l_0 + \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sowie dass nur kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auftreten (Kleinwinkelnäherung). An welche Differentialgleichung erinnert Sie ihr Ergebnis wenn $l_0 \gg \alpha t$?

1.2 PHYSIKALISCHES DOPPELPENDEL IN 2D



Wir betrachten zwei identische homogene Stäbe (Linienmassendichte: m/l, Länge:l) in einer Doppelpendel Anordnung in der Ebene. Schwerkraft mit konstanter Erdbeschleunigung g wirke in -y Richtung.

a) Wie lautet die Lagrangefunktion $L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ des Systems?

b) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen schreiben lässt als

$$L(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = ml^2\left(\frac{2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right) - \frac{3mgl}{4}\theta_1^2 - \frac{mgl}{4}\theta_2^2 \tag{1.2}$$

(entwickeln Sie Winkelfunktionen bis zur zweiten Ordnung in θ_1 und θ_2).

c) Schreiben Sie für die Lagrangefunktion in b) die Euler-Lagrange-Gleichungen an.

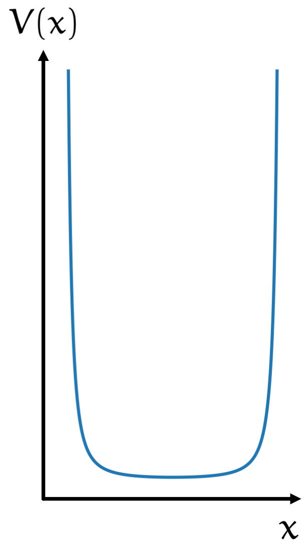
d) Bestimmen Sie mit Hilfe des folgenden Ansatz

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} e^{-i\omega t} \tag{1.3}$$

die Normalmoden (Frequenzen ω und Auslenkungen $\mathbf{A}$) des Systems.

e) Diskutieren und visualisieren Sie die Lösungen aus d).

1.3 1D Bewegung im einschüchternden Kraftfeld



Ein Teilchen mit Masse m und Positionskoordinate $x \in (-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a})$ bewege sich in folgendem Potential

$$V(x) = \frac{k}{2a^2} \frac{1}{\cos^2(ax)} - \frac{k}{2a^2}$$

a) Wie lautet die Formel für die Gesamtenergie des Teilchens zum Zeitpunkt t an der Koordinate $x(t)$?

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen bei $x(0) = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0. Verwenden Sie das Konzept der Energieerhaltung um die Geschwindigkeit $v(v_0, x)$ als Funktion von Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Position x zu bestimmen. Wo liegen die Umkehrpunkte $\pm x_U(v_0)$?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung des Teilchens.

d) Zeigen Sie, dass man die Zeit, die das Teilchen braucht um von $x = 0$ zu einem beliebigen x zu kommen durch den Ausdruck

$$t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(v_0, x')} dx'$$

beschreiben kann. Bestimmen Sie damit die Periode der Bewegung aus Punkt b) mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

Hinweis zu d): Formen Sie auf folgendes Integral um:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + b - \frac{b}{\cos^2(ax')}}} dx' = \frac{1}{a\sqrt{1+b}} \arcsin\left(\sqrt{1+b}\,\sin(ax)\right)$$

(für $b \geqslant 0$)

e) Machen Sie eine Reihenentwicklung für die Periode in den Grenzfällen sehr großer und sehr kleiner Anfangsgeschwindigkeit v_0. Erklären Sie vom Verlauf des Potentials (siehe Abbildung) qualitativ das Verhalten der Schwingungsperiode.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
1.1 ab / c / 1.2 ab / c / de / 1.3 ab / c / de