2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 13.12.2022

2

2.1 GEDÄMPFTER OSZILLATOR

Der gedämpfte harmonische Oszillator folgt der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2.1}$$

und ist ein nicht-konservatives System. Die Lagrangefunktion ist hat dann im Allgemeinen nicht mehr die einfache Gestalt $L = T - V$.

a) Nehmen Sie an, dass im gedämpften Oszillator sowohl die kinetische Energie T als auch die potentielle Energie V exponentiell gedämpft werden, und dass man somit $L(x, \dot{x}) = [T(\dot{x}) - V(x)]e^{-\alpha t}$ direkt hinschreiben kann. Bestimmen Sie α sodass sich mit diesem Ansatz aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung (2.1) ergibt.

b) Setzen Sie jetzt den Ansatz

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} y(t) \tag{2.2}$$

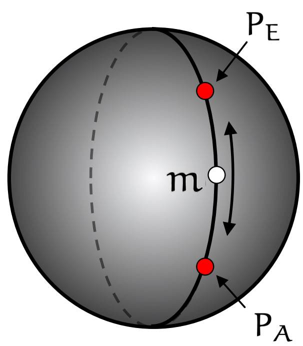
in die Bewegungsgleichung (2.1) ein, um eine Bewegungsgleichung für $y(t)$ zu erhalten. Wie lautet die Lagrangefunktion $L(y, \dot{y})$, die eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichung diese "einfachere" Bewegungsgleichung ergibt? Verifizieren Sie ihre Antwort indem Sie die Euler-Lagrange-Gleichung in y für $L(y, \dot{y})$ berechnen.

c) Drücken Sie nun in $L(y, \dot{y})$ das $y(t)$ und $\dot{y}(t)$ durch $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ aus um eine Lagrangefunktion des gedämpften Oszillators $L(x, \dot{x})$ zu erhalten. Verifizieren Sie auch hier ihr (zu (a) verschiedenes) Ergebnis indem Sie die Bewegungsgleichung (2.1) aus $L(x, \dot{x}, t)$ berechnen.

2.2 TEILCHEN AUF DER KUGEL

Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einer Kugel mit Radius R zwischen zwei Punkten $P_A = (\theta_A, \phi_A)$ and $P_E = (\theta_E, \phi_E)$ (Gravitation wird vernachlässigt). Sie können ihr Koordinatensystem so wählen, dass beide Punkte auf einem Längenkreis liegen (i.e. $\phi_A = \phi_E$) um das Problem effektiv eindimensional in θ zu machen. Lagrangefunktion L und Bewegungsgleichung des Systems ergeben sich dann zu:

$$L = \frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{\theta} = 0 \tag{2.3}$$



a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Randbedingungen $\theta(0) = \theta_A$ und $\theta(\tau) = \theta_B$. Zeigen Sie, dass es für die meisten θ_A und θ_B abzählbar unendlich viele Lösungen gibt (unter der Annahme, dass beliebig hohe Geschwindigkeiten möglich sind). Für welche θ_A und θ_B existieren überabzählbar unendlich viele?

b) Berechnen Sie die Wirkungen

$$S_n = \int_0^\tau L(\theta_n(t), \dot{\theta}_n(t), t) dt \tag{2.4}$$

für zwei verschiedene Lösungen $\theta_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ aus (a) und zeigen Sie, dass diese verschieden Wirkungen S_n voneinander verschieden sind.

c) Jetzt betrachten wir einen Pfad $(\theta_\epsilon, \phi_\epsilon)$ der durch ϵ parametrisiert sei:

$$\begin{pmatrix} \theta_\epsilon(t) \\ \phi_\epsilon(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} + \omega_n t \\ \epsilon t(\tau - t) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Da nunmehr auch Bewegung in ϕ-Richtung zugelassen ist, müssen Sie jetzt auch diese Komponente in L berücksichtigen:

$$L = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2(\theta)\right) \tag{2.6}$$

Für welchen Wert von ε wird die Wirkung extremal? Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

2.3 GELADENES TEILCHEN IN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

Betrachten Sie ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem homogenen elektrischen $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$ und magnetischen Feld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ (elektrostatisches Potential $\Phi = -Ey$, Vektorpotential $\mathbf{A} = Bx\mathbf{e}_y$).

a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion L des Systems an und bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen.

b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung für $E = 0$ eine gleichmäßige kreisförmige Bewegung in der (x, y)-Ebene ist.

c) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung für $B = 0$ eine gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung in y-Richtung ist.

d) Wie sieht dann die allgemeine Lösung für $E, B \neq 0$ qualitativ aus? Finden Sie Anfangsbedingungen für:

(I) Das Teilchen bewegt sich manchmal entgegen der Richtung von $\mathbf{E}$.
(II) Das Teilchen kommt manchmal zum Stillstand.

Visualiseren sie schematisch die jeweiligen Trajektorien!

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
2.1 a / b / c / 2.2 a / b / c / 2.3 ab / cd