4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 17.01.2023

4

4.1 POISSON KLAMMERN

Zeigen Sie, dass in Hamiltonschen Systemen die Produktregel für Zeitableitung auf Poisson Klammern von beliebigen Phasenraumfunktionen $f(\eta, t)$, $g(\eta, t)$ gilt, i.e.:

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\dot{f}, g\} + \{f, \dot{g}\} \tag{4.1}$$

Was folgt daraus wenn sie für ein System bereits zwei Erhaltungsgrößen ($\frac{d}{dt} f = 0$ und $\frac{d}{dt} g = 0$) kennen?

4.2 KANONISCHE TRANSFORMATIONEN

Betrachten Sie die Koordinatentransformation für ein eindimensionales System $H(q, p)$,

$$Q = q^k p^l \qquad k, l \in \mathbb{R}$$
$$P = q^m p^n \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

a) Wie müssen Sie k, l, m, n wählen um die Transformation kanonisch zu machen? Welche Transformation ergbit sich für m=0?

b) Bestimmen Sie eine erzeugende Funktion vom Typ $F_1(q, Q)$. Wie sähe eine erzeugende Funktion vom Typ $F_2(q, P)$ aus?

c) Unter welchen Bedingungen an α und β ist die folgende Transformation für ein eindimensionales System kanonisch?

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\alpha p}{q} \\ P &= \beta q^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Bestimmen sie weiters eine erzeugende Funktion zu dieser Transformation.

d) Betrachten wir nunmehr ein System mit 2 Freiheitsgraden $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$. Ist die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2, \qquad & P_1 &= \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\ Q_2 &= q_1 + q_2, \qquad & P_2 &= \frac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

kanonisch?

4.3 TEILCHEN IM KRAFTFELD

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter Einfluss der Kraft :

$$F = -kq - \frac{\alpha}{q^3} \tag{4.4}$$

a) Verifizieren Sie mithilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, dass

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 + A\frac{p}{q} \tag{4.5}$$

eine Hamiltonfunktion des Systems ist und bestimmen Sie die Konstante A.

b) Benutzen Sie die kanonische Transformation

$$Q = \arctan\left(\lambda\frac{q}{p}\right)$$

$$P = \frac{\frac{p^2}{\lambda} + \lambda q^2}{2} + \sqrt{\frac{m}{k}}A\frac{p}{q}$$

(wobei $\lambda = \sqrt{km}$) um zu zeigen, dass die neue Hamiltonfunktion $H'(Q,P) = \omega P$ (mit $\omega = \sqrt{k/m}$) ist.

c) Lösen Sie die Hamiltonschen BWGLs im $H'(Q,P)$ System mit den Anfangsbedingungen $Q(t=0) = Q_0$ und $P(t=0) = P_0$.

d) Transformieren sie nun zurück zu den ursprünglichen Koordinaten um ihre Lösung als $x(Q_0, P_0, t)$ anzuschreiben. Hierzu können ihnen trigonometrische Funktion des rechts abgebildeten Dreiecks helfen.

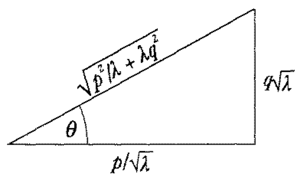

FIGURE 4.1: *Dieses Dreieck kann ihnen in d) helfen.* θ *ist ein Hilfswinkel den Sie mit* $Q(t)$ *identifizieren können sollten.*

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
4.1 / 4.2a / b / c / d / 4.3a / b / cd