3. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 19.12.2023

3

3.1 TEILCHEN IM ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

Die Hamiltonfunktion eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung Q im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{q}, t))^2 + Q\Phi(\mathbf{q}, t) . \tag{3.1}$$

Dabei sind $\Phi(\mathbf{q}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ das skalare Potential bzw. das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes am Aufenthaltsort $\mathbf{q}$ des Teilchens zum Zeitpunkt t. Das elektrische und das magnetische Feld ergeben sich aus den Potentialen gemäß

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{q}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{q}, t) , \tag{3.2}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) . \tag{3.3}$$

Dabei steht ∇ für $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}$.

a) Verwenden Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, um einen Zusammenhang zwischen dem kanonischen Impuls $\mathbf{p}$ und dem mechanischen Impuls $m\dot{\mathbf{q}}$ herzustellen.

b) Wie hängen $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$ zusammen?

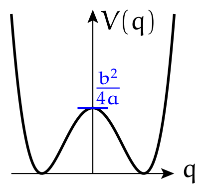
c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{e}_i v_j \partial_i A_j = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}$. Im Ausdruck auf der linken Seite wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. es wird über alle doppelt auftretenden Indizes von 1 bis 3 summiert. Dabei bezeichnet $\mathbf{e}_i$ den i-ten Einheitsvektor, sodass z.B. $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$. $\mathbf{v}$ sei ein beliebiger Vektor, $\mathbf{A}$ ist das Vektorpotential und ∂_i steht abkürzend für $\frac{\partial}{\partial q_i}$.
Tipps: Beginnen Sie die Rechnung bei dem doppelten Kreuzprodukt. Verwenden Sie für das Kreuzprodukt das Levi-Civita-Symbol.

d) Leiten Sie aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen die Lorentzkraft $m\ddot{\mathbf{q}} = Q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B})$ her.
Tipps: Greifen Sie im Zweifelsfall auf die Indexschreibweise und die Einsteinsche Summenkonvention zurück. Verwenden Sie alle Resultate der vorhergehenden Unterpunkte *a*–*c*.

Hendrik Lorentz

3.2 PHASENRAUMSTRUKTUR

Gegeben sei eine Punktmasse mit der Masse m im eindimensionalen Doppelmuldenpotential (siehe Abbildung rechts)



$$V(q) = aq^4 - bq^2 + \frac{b^2}{4a}, \tag{3.4}$$

wobei $a, b > 0$.

a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Potentials. Sind diese jeweils stabil oder nicht?

b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion direkt über die Energie und berechnen Sie daraus das Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q, p)$.

c) Erstellen Sie ein charakteristisches Phasenraumportrait. Skizzieren Sie dafür mehrere qualitativ unterschiedliche Phasenraumtrajektorien. Betrachten Sie dazu auf jeden Fall mindestens eine Trajektorie, die mit einer Energie $E < b^2/(4a)$ assoziiert ist und mindestens eine mit $E > b^2/(4a)$.

d) Wie sieht der Phasenraum um die in Punkt *a)* bestimmte labile Gleichgewichtslage aus? Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorie, die mit der Energie $E = b^2/(4a)$ assoziiert ist und diskutieren Sie ihre physikalische Bedeutung.

e) Entwickeln Sie das Potential bis zur quadratischen Ordnung um das in Punkt *a)* bestimmte rechte Minimum. Wie sieht das Phasenraumportrait in der unmittelbaren Umgebung dieses Minimums aus? Gibt es einen qualitativen Unterschied zum linken Minimum?

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
3.1 *a* / 3.1 *b* / 3.1 *c* / 3.1 *d* / 3.2 *ab* / 3.2 *c* / 3.2 *d* / 3.2 *e*