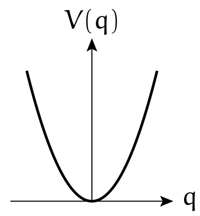
4. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 09.01.2024

4

4.1 POISSON-KLAMMER: HARMONISCHER OSZILLATOR

Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Eigenfrequenz ω lautet

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{4.1}$$



Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ohne Differentiation der Hamiltonfunktion her. Verwenden Sie dazu die Gleichung (5.5) aus dem Vorlesungsmanuskript, nämlich

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\}_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial t}, \tag{4.2}$$

sowie diverse Rechenregeln der Poisson-Klammer.

4.2 POISSON-KLAMMER: ERHALTUNGSGRÖSSEN

Betrachten Sie die eindimensionale kräftefreie Bewegung einer Punktmasse m und die Observable $g(q,p,t) = q - pt/m$.

Siméon Denis Poisson

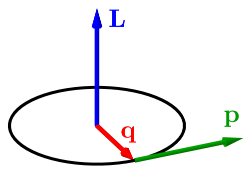
a) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass $g(q,p,t)$ und $H(q,p,t)$ in diesem Fall Erhaltungsgrößen sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass auch die Größe $\partial_t g(q,p,t)$ eine Erhaltungsgröße ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammer, dass die Aussage aus Unterpunkt *b)* auch ganz allgemein für mechanische Systeme gilt: Wenn $H(q,p,t)$ und $g(q,p,t)$ Erhaltungsgrößen sind, so ist auch $\partial_t g(q,p,t)$ eine Erhaltungsgröße.

4.3 POISSON-KLAMMER: DREHIMPULS

Der Drehimpuls eines Teilchens im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$, die z-Komponente ist damit $L_z = xp_y - yp_x$. $g(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sei eine von den Koordinaten $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ abhängige skalare Größe.

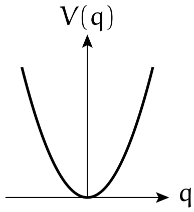


a) Geben Sie einen Ausdruck für die Poisson-Klammer $\{L_z, g\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ an.

b) Berechnen Sie $\{L_z, q_i\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ und $\{L_z, p_i\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ für $i = x, y, z$.

c) Berechnen Sie $\{L_z, L_x\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$. Was erwarten Sie für $\{L_z, L_y\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ und $\{L_z, L_z\}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$?

4.4 KANONISCHE TRANSFORMATION



Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Eigenfrequenz ω lautet

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \tag{4.3}$$

Wir führen die neuen Koordinaten

$$\bar{q} = C(p + im\omega q), \tag{4.4}$$
$$\bar{p} = C(p - im\omega q) \tag{4.5}$$

ein, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass dies eine kanonische Transformation darstellt. Verwenden Sie dazu die Poisson-Klammer.

b) Berechnen Sie die transformierte Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$.

c) Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten an und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\bar{q}(t=0) = \bar{q}_0$ und $\bar{p}(t=0) = \bar{p}_0$.

d) Transformieren Sie Ihr Ergebnis in die ursprünglichen Koordinaten q und p zurück. Transformieren Sie dafür auch die Anfangsbedingungen mit, d.h. verwenden Sie $\bar{q}_0 = C(p_0 + im\omega q_0)$ und $\bar{p}_0 = C(p_0 - im\omega q_0)$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
4.1 / 4.2 *ab* / 4.2 *c* / 4.3 *ab* / 4.3 *c* / 4.4 *a* / 4.4 *b* / 4.4 *cd*