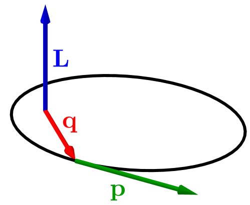
6. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 23.01.2024

6

6.1 ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN ISOTROPER ZWEI-KÖRPER-WECHSELWIRKUNGEN

Wir betrachten ein zu einem Zwei-Körper-Problem äquivalentes Ein-Körper-Problem mit isotroper Wechselwirkung. Die Hamiltonfunktion ist

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{q}|)\,. \tag{6.1}$$



Zeigen Sie:

a) Die Kraft $\mathbf{F} = -\frac{\partial U(|\mathbf{q}|)}{\partial \mathbf{q}}$ wirkt radial, d.h. $\mathbf{F} \parallel \mathbf{q}$.

b) Der Drehimpuls $\mathbf{L} := \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ ist eine Erhaltungsgröße.

c) Die Bahnkurve befindet sich in einer Ebene, die senkrecht zum Drehimpuls liegt.

6.2 LAPLACE-RUNGE-LENZ-VEKTOR

Wir betrachten für das Kepler- bzw. Coulomb-Problem mit dem Potential $U(r) = -\frac{K}{r}$ den Laplace-Runge-Lenz-Vektor

$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mu K}{r}\mathbf{q}. \tag{6.2}$$

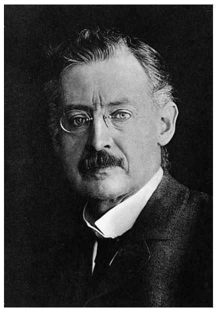
Dabei ist $\mathbf{L} := \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ der Drehimpuls und $r := |\mathbf{q}|$. Man kann zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist und dass $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mu^2 K^2 + 2\mu L^2 E}$, wobei $L = |\mathbf{L}|$ der Betrag des Drehimpulses und $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{r}$ die Gesamtenergie ist.

Pierre-Simon Laplace

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}$ mit Hilfe der Gleichung (6.2). Zeigen Sie, dass sich daraus über $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = r\,|\mathbf{A}| \cos(\varphi)$ (wobei φ der Winkel zwischen $\mathbf{q}$ und $\mathbf{A}$ ist) die Bahngleichung

$$\frac{c}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi) \tag{6.3}$$

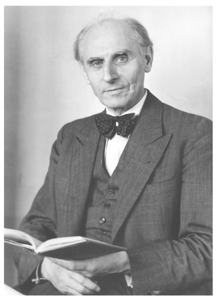
ergibt. Diese Gleichung beschreibt einen Kegelschnitt mit der Exzentrizität ε. Drücken Sie die Parameter c und ε durch die Konstante K, die reduzierte Masse μ, die Gesamtenergie E und den Betrag des Drehimpulses L aus. Wie hängt die Exzentrizität ε mit dem Betrag des Laplace-Runge-Lenz-Vektors, $|\mathbf{A}|$, zusammen?



Carl Runge

b) Begründen Sie mithilfe der Gleichung (6.3), für welche Werte von ε eine gebundene Bewegung (eine beschränkte Bahnkurve) vorliegt. Für welche Werte der Energie E ist dies der Fall?

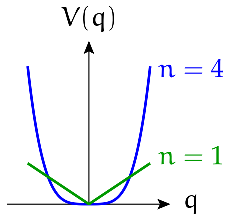
c) Überlegen Sie mithilfe der Definition des Winkels φ sowie der Bahngleichung (6.3), in welche Richtung der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt.



Wilhelm Lenz

6.3 DILATATIONSSYMMETRIE

Gegeben sei, wie in Beispiel 5.2, das Potential $V(q) = a|q|^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $q_m > 0$ die maximale Auslenkung bei einer vorgegebenen Energie E und T die dazugehörige Periodendauer. Leiten Sie (für feste Werte von n) die q_m-Abhängigkeit von T her, indem Sie ausschließlich die Dilatationssymmetrie benutzen.



6.4 SCHWERPUNKTSYSTEM

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Teilchen der Massen m_1 und m_2 in einer Dimension, deren Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(q_1 - q_2). \tag{6.4}$$

a) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion in den Schwerpunktskoordinaten (R, P) und Relativkoordinaten (q, p) an. Definieren Sie dabei alle auftretenden Größen. Welche der Variablen wird dabei zyklisch?

b) Ist diese Transformation kanonisch? Untermauern Sie Ihre Antwort, indem Sie explizit die Poissonklammern $\{R, P\}$, $\{q, P\}$, $\{R, p\}$ und $\{q, p\}$ berechnen.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
6.1 *a* / 6.1 *bc* / 6.2 *a* / 6.2 *b* / 6.2 *c* / 6.3 / 6.4 *a* / 6.4 *b*