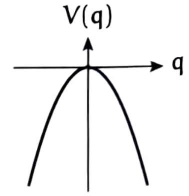
NACHTEST ANALYTISCHE MECHANIK VU, 04.03.2024

1 KANONISCHE TRANSFORMATION (16 PUNKTE)



Ein Teilchen bewegt sich im Potential eines „invertierten" harmonischen Oszillators (der Einfachheit halber setzen wir $\omega = m = 1$):

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}. \tag{1}$$

Lösen Sie das Problem mithilfe der kanonischen Transformation, die durch folgende erzeugende Funktion definiert ist:

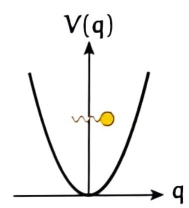
$$F_1(q,\bar{q}) = -\frac{1}{2}q^2 + \sqrt{2}q\bar{q} - \frac{1}{2}\bar{q}^2. \tag{2}$$

a) Berechnen Sie den alten Impuls p sowie den neuen Impuls $\bar{p}$ als Funktionen von q und $\bar{q}$.

b) Drücken Sie die alten Größen q und p durch die neuen Größen $\bar{q}$ und $\bar{p}$ aus. Überprüfen Sie mithilfe der fundamentalen Poisson-Klammer $\{q,p\}_{\bar{q},\bar{p}}$, ob diese Transformation kanonisch ist.

c) Ermitteln Sie die neue Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q},\bar{p})$. Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die neuen kanonischen Koordinaten $\bar{q}$ und $\bar{p}$ auf.

2 HAMILTON-JACOBI (17 PUNKTE)



Wir betrachten ein ultrarelativistisches Teilchen in 1D mit kinetischer Energie $T = c|p|$ im Potential eines harmonisches Oszillators. c bezeichne die Lichtgeschwindigkeit und k die Federkonstante des harmonischen Potentials. Die Hamiltonfunktion lautet somit

$$H(q,p,t) = c|p| + \frac{k}{2}q^2. \tag{3}$$

a) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Prinzipalfunktion $S(q,E,t)$ auf.

b) Welche Variable ist zyklisch? Wie lautet dafür der Separationsansatz?

c) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die charakteristische Funktion $W(q,E)$.

d) Integrieren Sie die stationäre Hamilton-Jacobi-Gleichung. Zur Vereinfachung betrachten Sie nur solche Lösungen, bei denen $p = |p| > 0$ Schreiben Sie die Prinzipalfunktion $S(q,E,t)$ an.

e) Berechnen Sie die generalisierte Koordinate $\beta = \partial S/\partial E$ sowie den Impuls $p = \partial S/\partial q$. Drücken Sie die alte Koordinate q durch die neue Koordinate β aus. Was ist die physikalische Einheit und Bedeutung von β?

f) Nehmen Sie folgende Anfangsbedingungen an:

$$q(t=0) = 0, \qquad p(t=0) = p_0 > 0. \tag{4}$$

Welche Werte ergeben sich daraus für β und E? Wie hängt die Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$ von der Zeit ab?

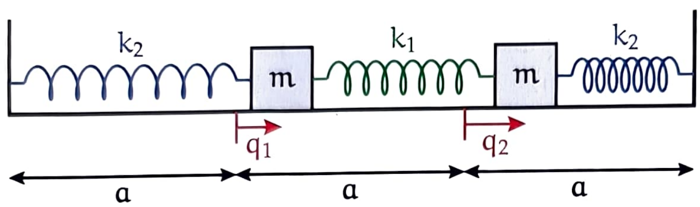
3 LIOUVILLE-THEOREM (17 PUNKTE)

Joseph Liouville

a) Was besagt das Liouville-Theorem (in Ihren Worten, ohne Formeln)?
b) Wie ist das Hamiltonsche Vektorfeld ν_H definiert? Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen ν_H und den Trajektorien im Phasenraum? Können sich Phasenraumtrajektorien schneiden? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) In welcher geometrischen Beziehung stehen das Hamiltonsche Vektorfeld und der Gradient der Hamiltonfunktion, $\nabla_\eta H$, zueinander? Beweisen Sie Ihre Antwort mathematisch.
d) Berechnen Sie die Divergenz des Hamiltonschen Vektorfeldes, $\nabla_\eta \cdot \nu_H$.
e) Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Unterpunkt *d)* zum expliziten Beweis des Liouville-Theorems. Starten Sie von: $\mathcal{V}(t) = \int_{\mathcal{M}(t)} d^f q\, d^f p$.

4 SCHWINGENDE MASSEN (17 PUNKTE)

Wir betrachten das hier abgebildete eindimensionale System:



Zwischen zwei Wänden mit Abstand $3a$ bewegen sich zwei Massen m reibungsfrei. Zwischen den beiden Massen befindet sich eine Feder mit der Federkonstante k_1. Zusätzlich verbinden zwei Federn mit Federkonstante k_2 die beiden Massen mit den Wänden. Alle Federn haben im entspannten Zustand die Länge a. Die Positionen der beiden Massen werden durch ihre Auslenkungen q_1 und q_2 beschrieben.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion für das gegebene System auf.
b) Leiten Sie daraus die Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen ab und bestimmen Sie den Ruhezustand (Gleichgewicht) des Systems.
c) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Form einerMatrixgleichung $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}\mathbf{q}$ mit $\mathbf{q} := (q_1, q_2)^T$. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{D}$.
d) Wir machen den Ansatz $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t}$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Amplitude $\mathbf{q}_0$, der Frequenz Ω und den Eigenvektoren und Eigenwerten von $\mathbf{D}$?
e) Zeigen Sie, dass sich folgende zwei qualitativ verschiedene Lösungen für $\mathbf{q}_0$ und Ω ergeben:

$$\mathbf{q}_{0,\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \qquad \mathbf{q}_{0,\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_\mathrm{II} = \sqrt{\frac{k_2 + 2k_1}{m}}.$$

f) Interpretieren Sie diese beiden Lösungen physikalisch. Wie bewegen sich die beiden Massen bei diesen Lösungen relativ zueinander? Welche Federn sind dabei jeweils wichtig? Welche der beiden Frequenzen Ω_I, Ω_II ist größer und warum?
g) Diskutieren Sie den Grenzfall $k_1 \to 0$ im Hinblick auf die Bewegungsgleichungen, die Matrix $\mathbf{D}$ sowie die Frequenzen Ω_I und Ω_II.