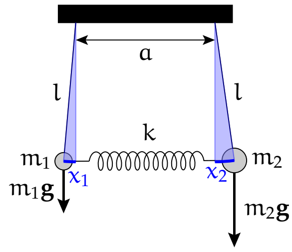
2. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 12.12.2023

2

2.1 GEKOPPELTE PENDEL (TEIL 2)



Wir greifen das Beispiel 1.4 vom vorangegangenen Tutorium auf. Es geht dabei um zwei Pendel mit der Länge l, an deren Enden die Massen m_1 bzw. m_2 befestigt sind, die wiederum über eine Feder mit der Federkonstante k miteinander verbunden sind. Darüber hinaus wirkt die Schwerkraft mit ihrer Gravitationsbeschleunigung g. Im vorigen Tutorium haben Sie für kleine Auslenkungen die folgende genäherte Lagrangefunktion hergeleitet:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{m_1 g}{2l}x_1^2 - \frac{m_2 g}{2l}x_2^2 - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 , \tag{2.1}$$

wobei x_1 und x_2 die Auslenkungen der Pendel aus ihrer jeweiligen Ruhelage (entlang der Kreisbögen) bezeichnen.

a) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für x_1 und x_2 an. Diese können in die Form $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ gebracht werden, wobei $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^\top$. Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{D}$.

b) Eigenmoden von schwingenden Systemen sind dadurch definiert, dass alle Konstituenten mit der gleichen Frequenz schwingen. Um die Eigenmoden des vorliegenden Systems zu bestimmen, machen wir also den Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\mathbf{x}_0$ und ω und den Eigenvektoren und Eigenwerten von $\mathbf{D}$?

c) Bestimmen Sie alle möglichen Lösungen für $\mathbf{x}_0$ und ω und interpretieren Sie sie physikalisch.

Lösung:

a) Die Euler-Lagrange-Gleichungen für x_1 und x_2,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} , \tag{2.2}$$

ergeben folgende Differentialgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = -\frac{m_1 g x_1}{l} + k(x_2 - x_1) , \tag{2.3}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -\frac{m_2 g x_2}{l} - k(x_2 - x_1) . \tag{2.4}$$

Die beiden Gleichungen lassen sich zu folgendem linearen System zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{g}{l} - \frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{g}{l} - \frac{k}{m_2} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{D}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \tag{2.5}$$

b) Wir setzen den Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}$ in das System der Differentialgleichungen ein und erhalten:

$$-\omega^2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{D}\mathbf{x}_0 \,. \tag{2.6}$$

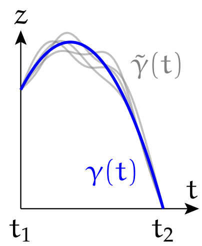
Wir erhalten ein Eigenwertproblem mit den Eigenwerten $\lambda = -\omega^2$ und den Eigenvektoren $\mathbf{x}_0$.

c) Die Lösung des Eigenwertproblems ergibt folgende Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = -\frac{g}{l}\,, \qquad \mathbf{v}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$\lambda_2 = \frac{-gm_1m_2 - klm_1 - klm_2}{lm_1m_2}\,, \qquad \mathbf{v}_2 \propto \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Die erste Lösung beschreibt das gemeinsame Schwingen der beiden Pendeln in Phase und ist masseunabhängig, während die zweite Lösung die Schwingung der beiden Pendeln gegeneinander beschreibt. Die Amplituden der beiden Pendeln verhalten sich dabei umgekehrt wie ihre Massen.



Eine Punktmasse der Masse m bewege sich senkrecht im Gravitationspotential $V(z) = mgz$. Wir wollen mithilfe des Variationsprinzips validieren, dass $\gamma(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ eine physikalische Lösung ist.

a) Stellen Sie das Wirkungsfunktional $S[\tilde{\gamma}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))dt$ für die Bahn $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \delta(t)$ auf, wobei $\delta(t)$ beliebig, aber stetig differenzierbar mit $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$ sei.

b) Zeigen Sie, dass das Wirkungsfunktional minimal wird genau dann, wenn $\delta(t) \equiv 0$.

Lösung:

a) Wir wissen, $\delta(t)$ sei eine beliebige, stetig differenzierbare Funktion. Damit gilt $\delta(t) = \epsilon\tilde{\delta}(t)$ mit $\epsilon \in \mathbb{R}_0$. Es gilt $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \epsilon\tilde{\delta}(t)$, was unsere z-Koordinate darstellen soll, sowie $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(t) + \epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)$ für die Geschwindigkeit. Die Lagrange Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2}|\dot{\tilde{\gamma}}|^2 - mg\tilde{\gamma}$$

wird über die Zeit integriert um das Wirkungsfunktional zu erhalten:

$$S[\tilde{\gamma}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}|\dot{\tilde{\gamma}}|^2 - mg\tilde{\gamma}\right] dt\,.$$

Nach explizitem einsetzen von $\tilde{\gamma}(t)$ erhält man

$$S[\tilde{\gamma}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}|v_0 - gt + \epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)|^2 - mg(z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \epsilon\tilde{\delta}(t))\right] dt\,. \tag{2.9}$$

Mit der Nebenrechnung

$$|v_0 - gt + \epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)|^2 = v_0^2 + g^2t^2 + \epsilon^2\dot{\tilde{\delta}}(t)^2 - 2v_0 gt + 2v_0\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t) - 2gt\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)$$

vereinfacht sich (2.9) zu

$$S[\tilde{\gamma}(t)] = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left[\epsilon^2\dot{\tilde{\delta}}(t)^2 + \epsilon(2v_0\dot{\tilde{\delta}}(t) - 2gt\dot{\tilde{\delta}}(t) - 2g\tilde{\delta}(t)) + \chi\right] dt\,, \tag{2.10}$$

wobei die Terme bereits nach Potenzen von ϵ geordnet wurden und $\chi = (v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt - 2g(z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2))$.

b) Um die extremal werdende Wirkung zu erhalten, differenzieren wir (2.10) nach ϵ und erhalten

$$\frac{d}{d\epsilon}S[\tilde{\gamma}(t)] = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left[2\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)^2 + 2v_0\dot{\tilde{\delta}}(t) - 2gt\dot{\tilde{\delta}}(t) - 2g\tilde{\delta}(t)\right] dt \tag{2.11}$$

beziehungsweise nach vereinfachen und umgruppieren

$$\frac{d}{d\epsilon}S[\tilde{\gamma}(t)] = m\int_{t_1}^{t_2}\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)^2dt + m\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot{\tilde{\delta}}(t)(v_0 - gt)\right]dt - m\int_{t_1}^{t_2}g\tilde{\delta}(t)dt\,. \tag{2.12}$$

Partielle Integration des zweiten Integrals leistet in Zusammenhang mit $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}S[\tilde{\gamma}(t)] \quad &= \quad m\int_{t_1}^{t_2}\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)^2dt + \underbrace{m\tilde{\delta}(t)(v_0 - gt)\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=\mathbf{0}} \\ &\quad +m\int_{t_1}^{t_2}\tilde{\delta}(t)(g)dt - m\int_{t_1}^{t_2}g\tilde{\delta}(t)dt\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Damit heben sich die letzten beiden Integrale ebenfalls weg und es bleibt

$$\frac{d}{d\epsilon}S[\tilde{\gamma}(t)] = m\int_{t_1}^{t_2}\epsilon\dot{\tilde{\delta}}(t)^2dt\,. \tag{2.14}$$

Forderung nach extremaler Wirkung $\delta S[\tilde{\gamma}(t)] = 0$ bedingt für einen im Intervall überall positiven — da quadratischen — Integranden, dass dieser verschwinden muss. Aus $\dot{\tilde{\delta}}(t) \equiv 0$ folgt $\delta(t) \equiv c_0$. Die Nebenbedingung $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$ ergibt $c_0 = 0$ und somit $\gamma(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ als wahre Trajektorie.

Die Lagrangefunktion für ein Teilchen ist gegeben durch

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{2.15}$$

mit einem radialsymmetrischen Potential $V(\sqrt{x^2 + y^2}) = V(r)$.

a) Ist eine der Koordinaten x, y zyklisch?

b) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion in Polarkoordinaten $\tilde{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$. Bestimmen Sie die konjugierten Impulse.

c) Ist jetzt eine der Koordinaten r, ϕ zyklisch? Was bedeutet das für die zugehörigen konjugierten Impulse p_r, p_ϕ? Können Sie das Noether-Theorem anwenden?

d) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch und bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(r, \phi, p_r, p_\phi)$ des Problems.

Lösung:

a) Da sowohl x als auch y in der Lagrangefunktion vorkommen, sind beide Koordinaten nicht zyklisch.

b) Die Darstellung in Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(\phi(t))\,, \\ y(t) &= r(t)\sin(\phi(t))\,. \end{aligned}$$

Die Zeitabhängigkeiten werden in den folgenden Schritten nicht mehr angeschrieben. Da zum Aufstellen der Lagrangefunktion die zeitlichen Ableitungen benötigt werden, werden diese hier gleich angeschrieben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi}\,, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi}\,. \end{aligned}$$

Die Polarkoordinaten werden für die Transformation in die Lagrangefunktion (2.15) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) &= \frac{m}{2}\left((\dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi})^2 + (\dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi})^2\right) - V(r) \\ &= \frac{m}{2}\big(\dot{r}^2\cos(\phi)^2 - 2\dot{r}r\dot{\phi}\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\dot{\phi}^2\sin(\phi)^2 \\ &+ \dot{r}^2\sin(\phi)^2 + 2\dot{r}r\dot{\phi}\cos(\phi)\sin(\phi) + r^2\dot{\phi}^2\cos(\phi)^2\big) - V(r) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r)\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Die konjugierten Impulse der allgemeinen generalisierten Koordinate q_i können folgendermaßen berechnet werden:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,. \tag{2.17}$$

Daraus folgt für die generalisierten Impulse der Polarkoordinaten:

$$p_r = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2} 2\dot{r} = m\dot{r}\,, \tag{2.18}$$

$$p_\phi = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{m}{2} 2\dot{\phi} r^2 = m\dot{\phi} r^2\,. \tag{2.19}$$

c) Da ϕ nicht mehr vorkommt in der Lagrangefunktion, ist dies eine zyklische Koordinate. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für eine zyklische Koordinate folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} = \text{const}\,. \tag{2.20}$$

Der generalisierte Impuls einer zyklischen Koordinate ist also konstant in der Zeit — eine Erhaltungsgröße. Für den generalisierten Impuls von ϕ gilt also:

$$p_\phi = m\dot{\phi} r^2 = \text{const}\,. \tag{2.21}$$

Der Drehimpuls ist also erhalten. Das Noether-Theorem besagt nun, dass jede kontinuierliche Symmetrie eines Systems mit einer Erhaltungsgröße korrespondiert (und umgekehrt). Der erhaltene Drehimpuls hängt hier mit der Isotropie des Raumes zusammen, was bedeutet, dass die Lagrangefunktion invariant unter Drehung um eine beliebige Raumachse ist. Auch die Bewegungsgleichungen bleiben daher invariant unter Drehungen. Es ist keine Richtung ausgezeichnet.

d) Die Hamiltonfunktion lässt sich allgemein bestimmen durch

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), t)\,, \tag{2.22}$$

wobei gilt, dass H bis auf ein Vorzeichen gleich der Legendre-Transformation der Lagrangefunktion ist. Durch Umformen der generalisierten Impulse folgt:

$$\dot{r}(p_r) = \frac{p_r}{m}\,, \tag{2.23}$$

$$\dot{\phi}(r, p_\phi) = \frac{p_\phi}{m r^2}\,. \tag{2.24}$$

Eingesetzt in die Lagrangefunktion ergibt dies:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(r, \phi, \dot{r}(p_r), \dot{\phi}(r, p_\phi)) &= \frac{m}{2m^2}\left(p_r^2 + r^2 \frac{p_\phi^2}{r^4}\right) - V(r) \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) - V(r)\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Für die Hamiltonfunktion ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} H(r, \phi, p_r, p_\phi) &= p_r \dot{r}(p_r) + p_\phi \dot{\phi}(r, p_\phi) - \tilde{L}(r, \phi, \dot{r}(p_r), \dot{\phi}(r, p_\phi)) \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\phi^2}{m r^2} - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + V(r) \qquad (2.26) \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + V(r)\,. \qquad (2.27) \end{aligned}$$

2.4 EICHINVARIANZ DER LAGRANGEFUNKTION

Zwei Lagrangefunktionen eines Teilchens mit Masse m und Ladung Q im konstanten, homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E}$ seien gegeben durch

$$L_1 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}, \tag{2.28}$$

$$L_2 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - Qt\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.29}$$

a) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für beide Fälle auf. Zeigen Sie explizit, dass man die gleiche Bewegungsgleichung erhält.

b) Begründen Sie ihr Ergebnis aus *a)* über eine mechanische Eichtransformation $F(\mathbf{r}, t)$.

Lösung:

a) Zuerst stellen wir die Euler-Lagrange-Gleichung für beide Funktionen auf. Die einzige (vektorwertige) Koordinate ist hier $\mathbf{r}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} - Q\mathbf{E} = 0}$$

Nun sehen wir uns die zweite Lagrangefunktion an:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_2}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{r}} - Qt\mathbf{E}\right) - 0 = 0$$

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} - Q\mathbf{E} = 0}$$

Man sieht: Die beiden Bewegungsgleichungen sind ident.

b) Die Bewegungsgleichungen unterscheiden sich nicht, daher kann hier eine Eichtransformation gefunden werden.
Da in den Euler-Lagrange-Gleichungen nur Ableitungen auftauchen, können zwei Lagrangefunktionen sich um einen totalen Zeitableitungsterm (Eichtransformation) unterscheiden. Im Skript ist das unter Gleichung (3.82) zu finden. In diese Gleichung setzen wir nun ein:

$$L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = L_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}, t) \tag{2.30}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - Qt\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}, t) \tag{2.31}$$

$$\Rightarrow -Qt\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{r}} = Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} + \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}, t) \tag{2.32}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}F(\mathbf{r}, t) = -Q\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} - Qt\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.33}$$

Wir können nun die Stammfunktion direkt ablesen bzw. partiell integrieren:

$$F(\mathbf{r}, t) = \int -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} - Qt\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{r}} \, dt \tag{2.34}$$

$$= \int -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} - Qt\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \int Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \, dt \tag{2.35}$$

$$= -Qt\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \,. \tag{2.36}$$

Unsere Eichtransformation ist also: $-Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}\, t$. Da unser elektrisches Feld konstant und homogen ist, sollten unsere Bewegungsgleichungen invariant unter Orts- bzw. Zeittranslationen sein. Daher kann die Eichung eine lineare $\mathbf{r}$- oder t-Komponente haben.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
2.1 *ab* / 2.1 *c* / 2.2 *a* / 2.2 *b* / 2.3 *ab* / 2.3 *cd* / 2.4 *a* / 2.4 *b*