

Ergänzungsseite Index- vs. Matrixschreibweise

Elektrodynamik I, Daniel Grumiller.

Wörterbuch. Gegeben sei ein 2-Tensor $T^{\mu\nu}$ (z.B. $T = \eta$ für die Minkowskimetrik, $T = \Lambda$ für Lorentztransformationen, $T = F$ für den Feldstärketensor etc.) der als Matrix ausgedrückt durch die Matrix T beschrieben ist. Dann gelten die Beziehungen (hier bezeichnet $\eta \sim \eta_{\mu\nu}$ die Minkowskimetrik als dualen 2-Tensor):

$$T^{\mu\nu} \sim T \quad (1)$$

$$T^\mu{}_\nu \sim T\eta \quad (2)$$

$$T_\mu{}^\nu \sim \eta T \quad (3)$$

$$T_{\mu\nu} \sim \eta T \eta \quad (4)$$

In Kontraktionen zwischen zwei oder mehr Tensoren kann es notwendig sein zu transponieren, nämlich dann, wenn die kontrahierten Indices nicht direkt nebeneinanderstehen. Beispiele:

$$\tilde{F}^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^\nu \sim \tilde{F} F \quad (5)$$

$$\tilde{F}^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \sim \tilde{F} F^T \quad (6)$$

$$\tilde{F}^{\alpha\mu} F_{\alpha}{}^\nu \sim \tilde{F}^T F \quad (7)$$

$$\tilde{F}^{\alpha\mu} F^\nu{}_\alpha \sim \tilde{F}^T F^T \quad (8)$$

Anmerkung: analoge Wörterbucheinträge kann man auch für Tensoren in beliebigen anderen Indexpositionen kreieren, wie z.B. $T^\mu{}_\nu$; oben wurde angenommen, dass die Matrix T dem Tensor $T^{\mu\nu}$ in dieser Indexposition entspricht, aber man hätte genausogut definieren können $T^\mu{}_\nu \sim T$. Im Zweifelsfalle ist die Indexschreibweise klarer und in jedem Fall eindeutig.

Lorentztransformationsmatrix. Eine wichtige Matrix von obigem Typ ist die Lorentztransformationsmatrix $\Lambda \sim \Lambda^\mu{}_\nu$, die die Minkowskimetrik $\eta \sim \eta^{\mu\nu}$ (hier als 2-Tensor) invariant lässt:

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta^{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda \eta \Lambda^T = \eta \quad (9)$$

Obige Gleichung lässt sich umformen in eine Gleichung für Λ^{-1} :

$$\eta \Lambda^T = \Lambda^{-1} \eta \rightarrow \Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta^{-1} \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^{-1\mu}{}_\nu = \eta^{\mu\alpha} \Lambda^\beta{}_\alpha \eta_{\beta\nu} = \Lambda_\nu{}^\mu \quad (10)$$

Bemerkung: für reine Rotationen gilt zusätzlich die Bedingung $\Lambda_{\text{rot}}^T = \Lambda_{\text{rot}}^{-1}$, während für reine boosts gilt $\Lambda_{\text{boost}}^T = \Lambda_{\text{boost}}$.

Lorentztransformationen von 2-Tensoren. Für die Lorentztransformation eines beliebigen 2-Tensor gilt:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} \Lambda^\nu{}_\beta \quad \leftrightarrow \quad F' = \Lambda F \Lambda^T \quad (11)$$

Kontraktionen und Übergang zu 3er-Schreibweise. Da man Elemente (von Kopien) des Vektorraums nur mit Elementen (von Kopien) des dualen Vektorraums zu einem Tensor niedrigerer Stufe kontrahieren kann, müssen in Indexschreibweise bei kontrahierten Ausdrücken die Summationsindices jeweils einmal oben und unten stehen, also beispielsweise $v \cdot u = v^\mu u_\mu = v_\mu u^\mu$ oder $(F \cdot j)^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu = F^\mu{}_\nu j^\nu$. Ein Ausdruck der Form $v_\mu u_\mu$ ergibt keinen Sinn; wenn man jedoch nur mehr 3er-Größen hat, also Ausdrücke mit ausschliesslich räumlichen Indices, dann ist es legitim durch Verwendung von $v_i = -v^i$ alle Indices nach unten zu ziehen und Ausdrücke mit ausschliesslich unteren Indices anzugeben (die man gedanklich mit einem Kronecker- δ kontrahieren kann), also beispielsweise $\text{div} \vec{E} = \partial_i E_i$ oder $(\text{rot} \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k$.